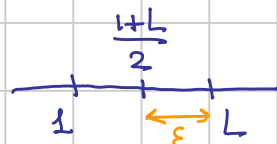


Criterio della radice Sia $a_n \geq 0$ definitivamente

- Se $\liminf \sqrt[n]{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n = +\infty$
- Se $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$ e $\sum a_n$ converge

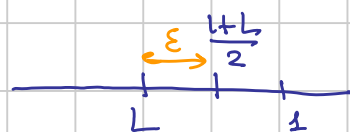
Dim. Supponiamo $\liminf \sqrt[n]{a_n} = L > 1$



Allora per la caratt. $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{1+L}{2}$ definitiv., quindi

$$a_n \geq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n \quad \text{da cui la tesi}$$

Supponiamo $\limsup \sqrt[n]{a_n} = L < 1$



Allora $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1+L}{2}$ definitiv., quindi

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{1+L}{2}\right)^n \quad \text{da cui la tesi, sia per la succ., sia per la serie.}$$

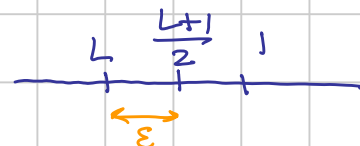
— 0 — 0 —

Criterio del rapporto Supponiamo $a_n > 0$ definitiv.

- Se $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, allora $a_n \rightarrow +\infty$ e $\sum a_n = +\infty$
- Se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$ e $\sum a_n$ converge

Dim. Facciamo sda la 2ª (la 1ª... esercizio)

Definitivamente, cioè $\forall n \geq n_0$ dato



$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{L+1}{2} \quad \forall n \geq n_0, \text{ cioè } a_{n+1} \leq \frac{L+1}{2} a_n$$

(qui uso $a_n > 0$)

da cui per induzione

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{L+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

e da qui si chiude con i carabinieri.
— o — o —

Criterio rapporto radice Supponiamo che $a_n > 0$ definitivamente.
Allora

ovvia

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Questo implica l'enunciato antico nel caso in cui $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ha limite

Dim. Dimostriamo la disug. di dx. Se $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ c'è poco da dimostrare. Quindi non essendo possibile $-\infty$ resta solo il caso in cui $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}$.

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora per la caratterizzazione esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ b.c.

$$\begin{array}{c} | \quad | \\ \hline L \quad L+\varepsilon \end{array}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Da qui per induzione come sempre ottengo

$$a_n \leq (L + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$$

Faccio la radice n -esima e ottengo

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{(L + \varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0}} = (L + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L + \varepsilon)^{n_0}}}$$

Per il confronto a 2 faccio $\limsup$ a dx e sx e ottengo
 $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$

(ho usato che $\sqrt[n]{A} \rightarrow 1$ per ogni costante A , cosa che va dimostrata prima con Bernoulli)

Poiché ε è arbitrario, abbiamo ottenuto che

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq L, \text{ cioè la tesi.}$$

— 0 — 0 —

Oss. Se non posso usare il $\limsup$, quando arrivo a

$$\sqrt[n]{a_n} \leq (L+\varepsilon) \sqrt[n]{\text{costante}}$$

non posso fare i limiti a dx e sx.

Un modo è dire che $RHS \rightarrow L+\varepsilon$, quindi definita

$RHS \leq L+2\varepsilon$, quindi definita anche $LHS \leq L+2\varepsilon$.

Si faceva il discorso con il $\geq$ e si chiude.

— 0 — 0 —

TEOREMI ALGEBRICI Non valgono come uno vorrebbe...

$$\limsup (a_n + b_n) \neq \limsup a_n + \limsup b_n$$

$$\liminf (\quad) \neq \liminf a_n + \liminf b_n$$

Esempio

$$a_n = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$b_n = 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$a_n + b_n = 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

Teorema per la somma Siano a_n e b_n due successioni. Allora

$$\begin{aligned} \liminf a_n + \liminf b_n &\leq \liminf (a_n + b_n) \overset{\text{ovvia}}{\leq} \limsup (a_n + b_n) \\ &\leq \limsup a_n + \limsup b_n \end{aligned}$$

tranne nei casi in cui c'è $+\infty - \infty$ in qualche modo

Dim. Dimostro solo quella di destra. Pongo $c_n = a_n + b_n$ e chiamo S_k^a, S_k^b, S_k^c i tre sup della definizione. Allora

$$S_k^c \leq S_k^a + S_k^b \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

da cui la tesi.

Perché è vera?

$$a_n \leq S_k^a \quad \forall n \geq k$$

$$b_n \leq S_k^b \quad \forall n \geq k$$

quindi

$$c_n = a_n + b_n \leq S_k^a + S_k^b \quad \forall n \geq k$$

quindi

$$S_k^c = \sup \{ c_n : n \geq k \} \leq \underbrace{S_k^a + S_k^b}_{\text{è un maggiorante}}$$

— o — o —

Moltiplicazione per una costante Moltiplichiamo per -1 !

$$\limsup (-a_n) = - \liminf a_n$$

$$\liminf (-a_n) = - \limsup a_n$$

Oss. In generale

→ se moltiplico per $\lambda > 0$ va tutto bene

→ se " " $\lambda < 0$ si inverte tutto.

Achtung! Non provare a tirare fuori formule creative per $a_n \cdot b_n$, tranne nel caso in cui è tutto positivo.

— o — o —

Proposizione Supponiamo che $a_n \rightarrow a_\infty > 0$ e sia b_n un'altra successione.

Allora

$$\limsup (a_n b_n) = a_\infty \limsup b_n$$

Dim. Fisso $\varepsilon > 0$

$$b_n \leq S_k^b \quad \forall n \geq k$$

$$0 \leq a_n \leq a_\infty + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Quindi se $n \geq k \geq n_0$ si avrà che

$$a_n b_n \leq (a_0 + \varepsilon) S_k^b \quad \forall n \geq k$$

Da qui si deduce che $S_k^c \leq (a_0 + \varepsilon) S_k^b$ e passando al limite ottengo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \leq (a_0 + \varepsilon) \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Perché ε è arbitrario ho una disuguaglianza.

Per avere la stima dal basso uso la sottosuccessione che tende $b_{i_m} \rightarrow \limsup b_n$

$$\underbrace{a_{i_m}}_0 - \underbrace{b_{i_m}}_0 \rightarrow \underbrace{a_0}_0 - \underbrace{\limsup b_n}_0$$

Esempio

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n$$

Sappiamo che $a_n \rightarrow \frac{1}{3}$ e $b_n \rightarrow 5$. Vorremmo dedurre

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n+1} & = & a_n & x_n & + & b_n \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ l & = & \frac{1}{3} l & + & 5 & \rightsquigarrow & \frac{2}{3} l = 5 \rightsquigarrow l = \frac{15}{2} \end{array}$$

Perché non si poteva? Perché anche avendo dim. che x_n è limitata (cosa non difficile), non sapremmo che esiste il limite.

Ora possiamo chiamare L il $\limsup$ e dire che

$$L \leq \frac{1}{3} L + 5 \quad \text{da cui} \quad L \leq \frac{15}{2}$$

e posso fare la stessa cosa con il $\liminf$.

Esercizio Nel $\limsup (a_n b_n)$ vale il segno di = se uno dei due è un limite.