

Teorema dei carabinieri Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{basta definitivamente})$$

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq \limsup a_n$$

↑
confronto $a_n \leq b_n$

↑
ovvietà

↑
confronto $b_n \leq c_n$

Corollario Se $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ e $c_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ (stesso l), allora anche $b_n \rightarrow$ stesso l .

Dim. I due laterali sono l , quindi i due centrali sono l , quindi $b_n \rightarrow l$ avendo $\liminf$ e $\limsup$ uguali

— o — o —

Teorema delle sottosuccessioni

Sia a_n una successione, e sia

a_{i_m} una sottosuccessione (si intende che i_m è una succ. stretta crescente di naturali),

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf a_{i_m} \leq \limsup a_{i_m} \leq \limsup a_n$$

↑
ovvia

Corollario Se $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, allora i due laterali sono uguali, quindi i 2 centrali sono uguali, quindi $a_{i_m} \rightarrow l$.

Dim del teo

$$S_k := \sup \{ a_n : n \geq k \}$$

U/

$$\hat{S}_k := \sup \{ a_{i_m} : m \geq k \}$$

Allora $\hat{S}_k \leq S_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ perché è il sup di "meno roba"
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $\limsup a_{i_m}$ $\limsup a_n$

Per il $\liminf$ è analogo con $\hat{I}_k \geq I_k$
 $\text{---} \text{---} \text{---}$

MAXLIM e MINLIM "Massimo limite possibile per una sottosucc. che ha limite"

Def. Sia a_n una successione

[1] Dico che $\maxlim a_n = +\infty$ se esiste una sottosuccessione
 $a_{i_m} \rightarrow +\infty$

[2] Dico che $\maxlim a_n = -\infty$ se $\lim a_n = -\infty$

[3] Dico che $\maxlim a_n = L \in \mathbb{R}$ se

(i) Esiste una s.succ. $a_{i_m} \rightarrow L$

(ii) Ogni sottosucc. che ha limite, ha limite $\leq L$

Teorema Per ogni successione a_n si ha che

$$\limsup a_n = \maxlim a_n$$

Bruttalmente: se $\limsup a_n = 14$, allora c'è una sottosuccessione che tende a 14, e tutte le sottosuccessioni o non hanno limite, o hanno limite ≤ 14 .

Dim. Dal teorema delle sottosuccessioni è ovvio che

$$\maxlim a_n \leq \limsup a_n$$

Resta da dimostrare il viceversa, cioè che esiste sempre una s.succ. che tende al $\limsup$. Qui ci sono 3 casi

Caso $\limsup = -\infty$ Per la caratterizz. $a_n \rightarrow -\infty$ quindi basta usare lei come sottosucc.

Caso $\limsup = +\infty$ Ipotesi: a_n non è limitata sup
Tesi: esiste $a_{i_n} \rightarrow +\infty$, che posso prendere strett. crescente.

Dim. Algoritmo:

- scelgo a_{i_0} a caso in modo che $a_{i_0} \geq 0$
- scelgo a_{i_1} in modo che $a_{i_1} \geq a_{i_0} + 1$ e $i_1 > i_0$
- scelgo a_{i_2} in modo che $a_{i_2} \geq a_{i_1} + 1$ e $i_2 > i_1$
- $\vdots$
- scelgo $a_{i_{k+1}}$ in modo che $a_{i_{k+1}} \geq a_{i_k} + 1$ e $i_{k+1} > i_k$

Ad ogni passaggio posso trovare l'indice richiesto perché a_n supera ogni barriera M per infiniti indici.

Per inclusione si dimostra che



$a_{i_k} \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (a ogni passaggio cresce almeno di uno)

Da qui segue che $a_{i_k} \rightarrow +\infty$.

Caso $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$ Ipotesi: $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$
Tesi: esiste $a_{i_k} \rightarrow L$

Ricordo la caratterizzazione:

$\forall \varepsilon > 0$

$a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

$a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente



Algoritmo

→ pseudo $\varepsilon = \frac{1}{20}$ e trovo a_{i0} b.c.

$$L-1 \leq a_{i_0} \leq L+1 \quad (\text{ce ne sono } \infty, \text{ basta prenderne } 1)$$

→ prendo $\varepsilon = \frac{1}{2^i}$ e trovo a_{i_1} t.c. $i_1 > i_0$

$$L - \frac{1}{2} \leq a_{i_k} \leq L + \frac{1}{2} \quad (\text{ce ne sono } \infty, \text{ quindi ce n'è uno con indice } > i_0)$$

1
1
1
1

→ supponendo di aver definito $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, definisco $a_{i_{k+1}}$ in modo tale che $i_{k+1} > i_k$

$$\boxed{L - \frac{1}{2^{k+1}}} \leq a_{i_{k+1}} \leq \boxed{L + \frac{1}{2^{k+1}}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$

L L

Quindi per i Carabinieri $a_{i_k} \rightarrow L$

Analogamente si definisce MIN_{LIM} al come minimo di cui è possibile e si dimostra che

minim $a_n = \liminf a_n$

Conseguenza operativa Come dimostro che $\limsup a_n = L$?

SLOGAN

- ① Disuguaglianza dall'alto
- ② Sottosuccessione dal basso

Esempio 1 $a_n = (-1)^n \arctan n$

Idea: $\dim \sup a_n = \frac{H}{2}$, $\dim \inf a_n = -\frac{H}{2}$

① $a_n \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi per confronto

$$\limsup a_n \leq \frac{\pi}{2}$$

② Basta trovare una s.succ. che tende a $\frac{\pi}{2}$, in questo caso a_{2n}

Per il liminf è il contrario, cioè

① Disug. dal basso $a_n \geq -\frac{\pi}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ da cui

$$\liminf a_n \geq -\frac{\pi}{2}$$

② S.succ. dall'alto, in questo caso $a_{2n+1} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Esempio 2

$$a_n = \frac{(-1)^n n + \sqrt{n} + 3}{2n + (-1)^n \sqrt{n}}$$

① $a_n \leq \frac{n + \sqrt{n} + 3}{2n - \sqrt{n}} \rightsquigarrow \limsup a_n \leq \frac{1}{2}$

$\downarrow \frac{1}{2}$

② S.succ. dal basso: $a_{2n} = \dots \rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow \limsup a_n = \frac{1}{2}$

Analogamente per il liminf uso $a_{2n+1} \rightarrow -\frac{1}{2}$ e

$$a_n \geq \frac{-n + \sqrt{n} + 3}{2n - \sqrt{n}} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

↑
occhio alle
disuguaglianze

Se $A \geq B$ e $C \leq D$, è vero che

$$\frac{A}{C} \geq \frac{B}{D} ?$$

NO! OK se è tutto positivo,
allora è OK

Andava bene anche

$$a_n \geq \frac{-n + \sqrt{n} + 3}{2n + (-1)^n \sqrt{n}} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$A \geq B \text{ e } C > 0$$

$$\Rightarrow \frac{A}{C} \geq \frac{B}{C}$$