

LIMINF e LIMSUP di successioni

Idea brutale: $a_n = (-1)^n$ non ha limite

$$\leadsto \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1$$

$$b_n = (-n)^n \leadsto \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$$

Def. Sia a_n una successione di numeri reali

[1] Se a_n non è limitata superiormente, allora si pone

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

[2] Se a_n è limitata superiormente (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ b.c. $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$), allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$S_k = \sup \{ a_n : n \geq k \} \in \mathbb{R}$$

è un numero reale. Inoltre $S_{k+1} \leq S_k$ perché sto facendo il sup su meno roba. Si pone allora

$\limsup =$ limite del sup.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k$$

Questo limite esiste in $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ perché S_k è una succ. debolmente decrescente

Oss. Poiché S_k è deb. decresc., il limite è l'inf., quindi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n$$

Def. (di $\liminf$) Sia a_n una successione.

[1] Se a_n non è limitata inferiormente, allora

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

[2] Se a_n è limitata inferiormente, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$I_k := \inf \{a_n : n \geq k\} \in \mathbb{R}$$

e inoltre $I_{k+1} \geq I_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, quindi posso porre

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} a_n$$

Oss. 1 $\liminf$ e $\limsup$ esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione Per ogni successione a_n si ha che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

← disuguaglianza
in $\overline{\mathbb{R}}$

[Dim.] Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{array}{ccc} I_k & \leq & S_k & (\text{inf e sup dello stesso insieme}) \\ \downarrow & & \downarrow & \\ \liminf & \leq & \limsup & (\text{ho usato il criterio del confronto} \\ & & & \text{a 2 sapendo già che } I_k \text{ ed } S_k \\ & & & \text{hanno limite per } k \rightarrow +\infty). \end{array}$$

Esempio 1 $a_n = (-1)^n$. Allora

$$\begin{array}{ccc} I_k = -1 & S_k = 1 & \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow & \\ \liminf = -1 & \limsup = 1 & \end{array}$$

Esempio 2 $a_n = \frac{1}{n}$. Allora $S_k = \frac{1}{k} \rightarrow 0 = \limsup$

$$I_k = 0 \rightarrow 0 = \liminf.$$

— 0 — 0 —

Proposizione Siano a_n e b_n due successioni con
 $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (basta definitivamente)

Allora

$$\liminf a_n \leq \liminf b_n$$

e

$$\limsup a_n \leq \limsup b_n$$

Dim. Indichiamo con S_k^a e I_k^a sup e inf fatti su a_n
 S_k^b e I_k^b " " " " b_n

$$\begin{array}{l} S_k^a = \sup \{a_n : n \geq k\} \\ I_k^a = \inf \quad \quad \quad \end{array}$$

$$\begin{array}{l} S_k^b = \sup \{b_n : n \geq k\} \\ I_k^b = \inf \quad \quad \quad \end{array}$$

Allora

$$\begin{array}{ccc} S_k^a \leq S_k^b & \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow \\ \limsup a_n \leq \limsup b_n \end{array}$$

Analogamente

$$\begin{array}{ccc} I_k^a \leq I_k^b & \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow \\ \liminf a_n \leq \liminf b_n \end{array}$$

— 0 — 0 —

Caratterizzazione di $\limsup$ e $\liminf$

1 $\limsup a_n = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_n \geq M$$

Questo è come dire che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha $a_n \geq M$ frequentemente

2 $\limsup a_n = L \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$



(i) $a_n \leq L + \varepsilon$ definitivamente

(ii) $a_n \geq L - \varepsilon$ frequentemente

Dim. $L = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k$. Quindi $\exists k_0$ t.c. $S_k \leq L + \varepsilon$ per ogni $k \geq k_0$, quindi

$$\sup \{ a_n : n \geq k \} \leq L + \varepsilon \quad \text{se } k \geq k_0$$

quindi

$$a_n \leq L + \varepsilon \quad \forall n \geq k_0$$

Resta da dimostrare che $a_n \geq L - \varepsilon$ per infiniti indici n , cioè frequentemente. Se per assurdo lo facesse un numero finito di volte, allora definitivamente avremmo

$$S_k \leq L - \varepsilon$$

e quindi passando al limite avremmo $\limsup a_n \leq L - \varepsilon$, il che è assurdo.

3 $\limsup a_n = -\infty$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Dim. $S_k \rightarrow -\infty$, quindi $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha



$S_k \leq M$ definitivamente, il che equivale a dire che $a_n \leq M$ definitivamente.

Analogamente per il liminf

[1] $\liminf a_n = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \leq M$$

[2] $\liminf a_n = l \in \mathbb{R}$ se e solo se
per ogni $\varepsilon > 0$

(i) $a_n \leq l + \varepsilon$ frequentemente

(ii) $a_n \geq l - \varepsilon$ definitivamente



[3] $\liminf a_n = +\infty$ se e solo se $\lim a_n = +\infty$

[Stesse dimostrazioni di prima]

Teorema Sia a_n una successione tale che

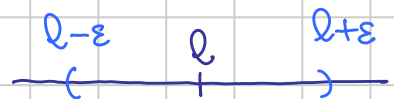
$$\liminf a_n = \limsup a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $a_n \rightarrow l$ (stesso l)

Dim Ci sono 3 casi

- Se $l = +\infty$ guardo il liminf e uso la caratterizzazione
- Se $l = -\infty$ guardo il limsup e ~ ~ ~
- Se $l \in \mathbb{R}$, allora

$a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente per colpa del
 $\limsup$



$a_n \geq l - \varepsilon$ definitivamente per colpa del liminf

Quindi in conclusione $l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ defn.
e questo è quello che mi chiede la def. di limit.

— o — o —