

Esempio

$$\begin{cases} x_{n+1} = \arctan n \cdot x_n^2 \\ x_1 = \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Possibili limiti: $\leadsto l = \frac{\pi}{2} l^2 \leadsto l = 0$ oppure $l = \frac{2}{\pi}$
 inoltre anche $l = +\infty$ è compatibile.
 Anche qui aspettiamo un effetto soglia.

FATTO 1 Se $x_{m_0+1} > x_{m_0}$, allora $x_{n+1} > x_n$ per ogni $n \geq m_0$

Inclusione ... $x_{n+2} = \arctan(n+1) \cdot x_{n+1}^2$
 $\geq \arctan n \cdot x_n^2 = x_{n+1}$

FATTO 2 Se $x_{m_0} \leq \frac{2}{\pi}$, allora $x_n \leq \frac{2}{\pi}$ per ogni $n \geq m_0$

Inclusione ... $x_{n+1} = x_n^2 \cdot \arctan n \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi}$

FATTO 3 Se $x_{m_0} < \frac{2}{\pi}$, allora $x_{n+1} < x_n < \frac{2}{\pi}$ per ogni $n \geq m_0$

Dim.

$$x_{n+1} = x_n \cdot x_n \cdot \arctan n$$

$$< x_n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = x_n$$

FATTO 4 Zona verde: dati iniziali per cui va sotto $\frac{2}{\pi}$.

Questa è un intervallo aperto (tende a 0)

Zona rossa: dati per cui ad un certo p.to va sopra $\frac{2}{\pi}$ e cresce almeno per un valore di n
 (tende a $+\infty$)

In mezzo per forza tende a $\frac{2}{\pi}$

FATTO 5 Unicità: si fa come prima.

Esempio 2
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \\ x_1 = \alpha > 0 \end{cases}$$

Visto volta precedente:

→ esistono α per cui tende a $+\infty$ (ad esempio 2015)

→ esistono α per cui tende a 0 (ad esempio 1)

Quasi evidente:

→ se per un certo α tende a $+\infty$ allora lo fa per tutti i successivi

→ se per un certo α tende a 0, allora lo fa per tutti i precedenti

~~verde~~ — ~~rosso~~

La zona verde è aperta: supponiamo

che per un certo $\alpha > 0$ la succ. tende a 0, allora $\exists n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0}(\alpha) < 1$. Ma allora per continuità anche per valori vicini (più grandi o più piccoli) avremo che $x_{n_0}(\alpha) < 1$, quindi per quegli α vicini continua a tendere a 0.

Dico che $\sup \text{Verde} = \inf \text{Rosso}$ e per quel valore tende ancora a $+\infty$.

Dim. Cosa può succedere per quel valore?

→ Non può tendere a 0 (sarebbe nel verde che è aperto)

→ Può esistere n_0 t.c. $x_{n_0+1} < x_{n_0}$? Se lo facesse, sarebbe decrescente da lì in poi...

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2}{n+1} \leq \frac{x_n^2}{n} = x_{n+1}$$

ma allora avrebbe un limite reale e questo sarebbe per forza 0.

→ Allora $x_{n+1} \geq x_n$ per ogni n , quindi ha limite e questo non può essere reale, quindi è $+\infty$.

Detta α_0 la soglia, voglio dimostrare che l' x_n corrispondente tende a $+\infty$ come n , cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{x_n}{n}} = 1.$$

$\uparrow y_n$

Dim. Cosa risolve y_n ?

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n^2 y_n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} y_n^2$$

$\uparrow$ ricorrenza per x_{n+1} $x_n = n y_n$

cioè

$$y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n^2$$

e questo rientra negli esercizi precedenti: sopra la soglia tende a $+\infty$ (violento), sotto la soglia tende a 0 (violento), sulla soglia unica tende a 1.

— 0 — 0 —

Esempio 3
$$\begin{cases} x_{n+1} = 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \\ x_1 = \alpha \end{cases}$$

Esistono valori $\alpha > 0$ per cui x_n è crescente?

Se $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $l = 10\sqrt{l}$, cioè $l=0$ oppure $l=10^2$

FATTO 1 Se esiste $n_0 \geq 1$ tale che $x_{n_0+1} \leq x_{n_0}$, allora $x_{n+1} \leq x_n$ per ogni $n \geq n_0$

Dim. Induzione ...

$$x_{n+2} = 10\sqrt{x_{n+1}} + \frac{1}{n+1} \leq 10\sqrt{x_n} + \frac{1}{n} = x_{n+1}$$

$\uparrow$ ipotesi induttiva
 $+ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$

FATTO 2 $x_n \leq \alpha + 200$ per ogni $n \geq 1$

Dim. Induzione ..., $n=1$ banale ...

$$x_{n+1} = 10 \sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \leq 10 \sqrt{\alpha + 200} + 1 \leq \alpha + 200$$

$\uparrow$
controllore...

FATTO 3 Per ogni $\alpha \geq 0$ il limite esiste ed è reale, quindi è 100.

Dim. Abbiamo visto che

- 0 è sempre crescente (quindi il limite esiste $\in \mathbb{R}$)
- 0 è definitivamente decrescente (quindi come sopra)

FATTO 2.5 Se $x_n \leq 100$, allora $x_{n+1} \geq x_n$

Dim. $x_{n+1} = 10 \sqrt{x_n} + \frac{1}{n} \geq 10 \sqrt{x_n} \geq x_n$

$\uparrow$
se $x_n \leq 100$

Alla fine sono rimasti 2 possibili comportamenti

- cresce sempre e tende a 100
- ad un certo pto inizia a decrescere e tende a 100

FATTO FINALE Il primo comportamento non è possibile perché
Se $x_n \leq 100$, allora

$$x_{n+1} = \underbrace{10 \sqrt{x_n}}_{\geq x_n} + \frac{1}{n} \geq x_n + \frac{1}{n}$$

Ma allora $x_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ e le somme parziali dell'armonica divergono.