

Esempio 1
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$x_n \rightarrow 0$ e si può dimostrare in vari modi

- piano con la monotonia

- piano limitatezza + carabinieri

$$(i) \quad 0 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii) \quad x_n \rightarrow 0$$

Dim (i)

$$\dots \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \dots$$

Esempio 2
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \\ x_1 = 2015 \end{cases}$$

Idea: crescita del numeratore compete con la crescita del denominatore

PIANO

$$(i) \quad x_n \geq 2^n \quad \forall n \geq 1$$

$$(ii) \quad x_n \rightarrow +\infty \quad (\text{banale da (i)})$$

Dim (i)

Provo per induzione. PB $\rightarrow$ facile

P.I.

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{n} \geq \frac{4^n}{n} \geq 2^{n+1}$$

$\uparrow$ ipotesi induttiva $\uparrow$ spero...

Controllo la speranza: $\frac{4^n}{n} \geq 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq n$

$$(1+1)^{n-1} \geq 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

$\uparrow$ Bernoulli

Speranza ok $\Rightarrow$ pto (i) ok.

Idea: c'è un valore α_0 b.c.

• per $x_1 > \alpha_0$ si ha $x_n \rightarrow +\infty$

Capra e panca

• per $0 \leq x_1 < \alpha_0$ si ha $x_n \rightarrow 0$

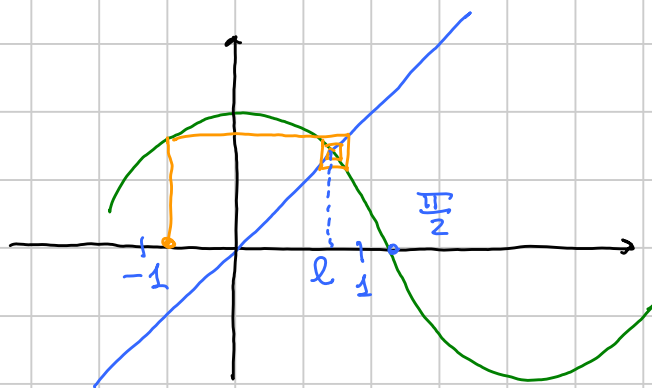
Cosa succede per $\alpha = \alpha_0$?

— 0 — 0 —

Esempio 3 Scrivo 2015 sulla calcolatrice, e poi schiaccio in continuazione $\cos$?

Dopo un po' si stabilizza su 0.73...

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$



Idea: $x_n \rightarrow l$, dove l è la soluzione di $x = \cos x$

Fatto 1 L'equazione $x = \cos x$ ha un'unica sol. l reale

Dim. Considero $f(x) = x - \cos x$. Per monotonia 3 è strett. crescente, quindi iniettiva. I limiti a $\pm \infty$ mi danno la surgettività. Quindi $f(x) = 0$ ha sol. unica

FATTO 2 Dimostro che $x_n \rightarrow l$ con la distanza.

$d_n := |x_n - l|$ e provo $d_{n+1} \leq c d_n$

$$\dots d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |\cos x_n - \cos l| = \underbrace{|\sin c_n|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{d_n}$$

avrei ottenuto $d_{n+1} \leq d_n$ e questo non basta

PIANO (i) $-1 \leq x_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ (banale)

(ii) $d_{n+1} \leq (\sin 1) \cdot d_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $d_n \leq (\sin 1)^{n-1} d_1 \quad \forall n \geq 1$ (banale)

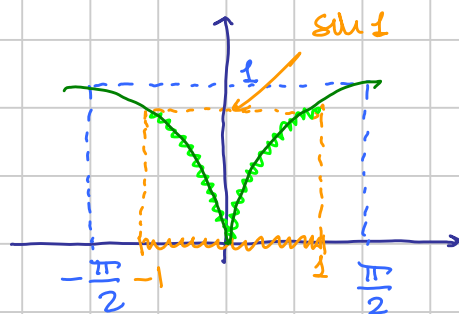
(iv) $d_n \rightarrow 0$ (banale)

Dim. (ii)

$$d_{n+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{come} \\ \text{sopra}}}{|\sin c_n|} \cdot d_n$$

Ora c_n sta tra l e x_n , quindi $c_n \in [-1, 1]$ e

$$\max \{ |\sin x| : x \in [-1, 1] \} = \sin 1 < 1$$



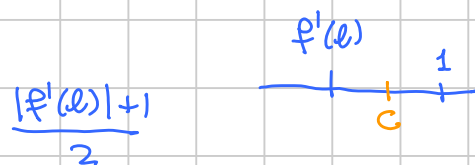
— o — o —

Prendiamo $x_{n+1} = f(x_n)$ autonoma

Sia l un soluzione di $x = f(x)$.

Supponiamo che $|f'(l)| < 1$.

Se $f'(x)$ è continua, allora



$$\exists r_0 > 0 \exists c < 1 \text{ tale che } |f'(x)| \leq c \quad \forall x \in [l-r_0, l+r_0]$$

$$\text{Conseguenza: } \begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in [l-r_0, l+r_0] \end{cases}$$

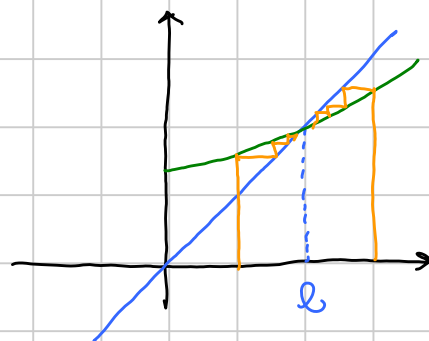
Allora $x_n \rightarrow l$

Dim. piano con la distanza $d_n = |x_n - l|$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |f(x_n) - f(l)|$$

$$= \underbrace{|f'(c_n)|}_{\leq c} \cdot \underbrace{|x_n - l|}_{d_n}$$

$\leq c \cdot d_n$ e da qui si conclude come
sempre poiché $c < 1$.



Intuitivamente: se in un pto l di incontro ($l = f(l)$) si ha che $|f'(l)| < 1$, allora ogni successione che parte vicino ad l tende ad l .

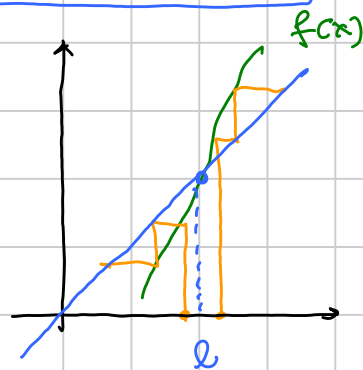
— o — o —

Supponiamo ora che $|f'(l)| > 1$. Allora se è continua

$$\exists c > 1 \quad \exists r_0 > 0 \text{ tale che } |f'(x)| \geq c \quad \forall x \in [l-r_0, l+r_0]$$

Allora se considero $x_{n+1} = f(x_n)$

le soluzioni non possono tendere ad l , a meno che non assumano definitivamente il valore l



Dim. Se per assurdo $x_n \rightarrow l$, allora definitivamente

$$x_n \in [l-r_0, l+r_0]$$

ma in quell'intervallo anzi

$$d_{n+1} = |f'(c_n)| \cdot d_n \geq c d_n$$

↑
maggiore di 1

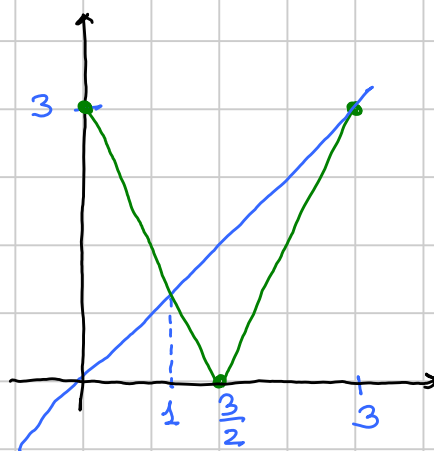
e quindi la distanza dal limite definitivamente aumenta

— o — o —

Esempio $\begin{cases} x_{n+1} = |2x_n - 3| \\ x_0 = \sqrt{2} \end{cases}$

$$x = 3 - 2x \rightsquigarrow x = 1$$

Dico che x_n non ha limite



FATTO 1 $0 \leq x_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (facile induzione usando $f([0,3]) = [0,3]$)

Questo esclude $x_n \rightarrow +\infty$ o $x_n \rightarrow -\infty$

FATTO 2

Se $x_n \rightarrow l$, allora $l = 1$ oppure $l = 3$ (incontro dei grafici).

Tuttavia, quando $x_n \in [\frac{3}{2}, 3]$ la sua distanza da 3 raddoppia, quando $x_n \in [0, \frac{3}{2}]$ la sua distanza da 1 raddoppia

FATTO 3

Se dimostro che x_n non diventa mai 1 o 3, allora ho dimostrato che non ha limite.

Per far questo basta dire che

$$x_n = a_n \sqrt{2} + b_n \quad \text{con } a_n \text{ e } b_n \text{ interi e } a_n \neq 0$$

(banale inclusione)