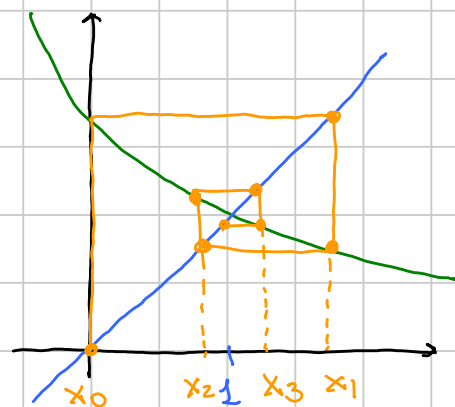


Successioni per ricorrenza spiraleggianti

Due approcci $\rightarrow$ piano con la distanza
 $\rightarrow$ piano con le due sottosuccessioni

Esempio 1
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{8}{5+3x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Idea: $x_n \rightarrow 1$ spiraleggiando

PIANO CON LA DISTANZA

Pongo $d_n := |x_n - 1|$ presunto limite

(i) $x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(Potei mettere $0 \leq x_n \leq \frac{8}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

(ii) $d_{n+1} \leq c d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(voglio che $c < 1$)

(iii) $d_n \leq c^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iv) $d_n \rightarrow 0$, cioè $x_n \rightarrow 1$

Tutto sta a capire al p.to (ii) chi è c , che poi è la costante di Lip. di $f(x) = \frac{8}{5+3x}$ in $x \geq 0$, cioè

$$\max \{ |f'(x)| : x \geq 0 \} = \max \left\{ \frac{8 \cdot 3}{(5+3x)^2} : x \geq 0 \right\} = \frac{24}{25} = c$$

Dim (ii) so modo: usando la Lipschitzianità

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)| \leq \frac{24}{25} |x_n - 1| = \frac{24}{25} d_n$$

2° modo : con le uau

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = \left| \frac{8}{5+3x_n} - 1 \right| = \left| \frac{8-5-3x_n}{5+3x_n} \right| = \frac{3|x_n-1|}{|5+3x_n|}$$

$$= \frac{3}{|5+3x_n|} \cdot d_n \leq \frac{3}{5} d_n, \text{ quindi ho un c diverso che va comunque bene perché è } < 1.$$

— 0 — 0 —

PIANO CON LE DUE SOTTOSUCCESSIONI

Idea : x_n non è monotona, ma x_{2n} e x_{2n+1} lo sono.

$$(i) \quad 0 \leq x_{2n} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(i') \quad 1 \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad x_{2n+2} \geq x_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{su pari cresce})$$

$$(ii') \quad x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{su dispari decresce})$$

$$(iii) \quad x_{2n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$(iii') \quad x_{2n+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = m = 1, \text{ quindi globalmente } x_n \rightarrow 1$$

Dim (iii) e (iii') $\leadsto$ facili (teo. succ. monotone)

Dim. (iv)

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+1} & = & \frac{8}{5+3x_{2n}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ m & = & \frac{8}{5+3l} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_{2n+2} & = & \frac{8}{5+3x_{2n+1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & \frac{8}{5+3m} \end{array}$$

Invece di una equ. per l , ho un sistema per m ed l .

$$\begin{cases} 5m + 3ml = 8 \\ 5l + 3ml = 8 \end{cases} \quad \leadsto m = l \quad \leadsto 3m^2 + 5m - 8$$

$$\leadsto m = 1$$

$$\text{e } m = -\frac{8}{3} \quad \text{discomp. con (i) e (i')}$$

I p.ti (i), (i'), (ii), (ii') si possono fare uno per volta per involuzione.

Volevo c'è una scorciatoia.

Sono infatti equivalenti a dimostrare che

$$0 \leq x_{2n} \leq x_{2n+2} \leq 1 \leq x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5}$$

"Basta" dimostrare tutto ciò per involuzione.

Il passo base $n=0$ si fa a mano (ma anche qui risparmierevo).

Per il passo induttivo, prendo la catena e applico $f(x) = \frac{8}{5+3x}$

Essendo $f(x)$ decrescente, inverto i versi

$$f\left(\frac{8}{5}\right) \leq f(x_{2n+1}) \leq f(x_{2n+3}) \leq f(1) \leq f(x_{2n+2}) \leq f(x_{2n}) \leq f(0)$$
$$0 \leq x_{2n+2} \leq x_{2n+4} \leq 1 \leq x_{2n+3} \leq x_{2n+1} \leq \frac{8}{5}$$

Se ora applico nuovamente $f(x)$ e inverto nuovamente i versi ottengo la tesi del passo induttivo.

Più con le mani: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{8}{5}$, $x_2 = \frac{8}{5+3 \cdot \frac{8}{5}} = \frac{40}{49}$

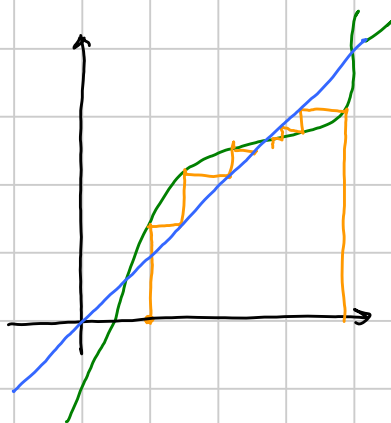
Quindi	$x_0 \leq x_2 \leq 1$	Applico $f(x)$, invertendo i versi
	$x_1 \geq x_3 \geq 1$	" " " " "
	$x_2 \leq x_4 \leq 1$	
	$x_3 \geq x_5 \geq 1$	

Continuando in questo modo, ottengo tutte le disuguaglianze che servono.

Quindi lo spiraleggiamento è causato dall'aver utilizzato una $f(x)$ decrescente.

Achtung! Se $f(x)$ è crescente, allora x_n può essere crescente o decrescente ma è sempre monotona

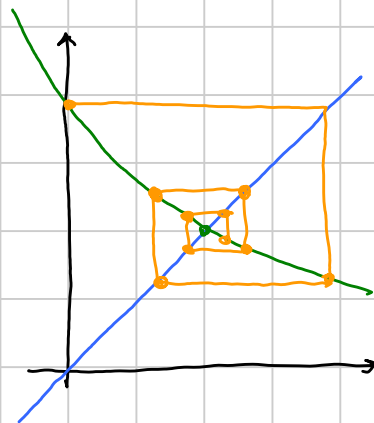
A decidere se x_n cresce o decresce è se $f(x) > x$ oppure $f(x) < x$ in una certa zona.



Se $f(x)$ è decrescente, allora per forza x_n è spiraleggiante, e lo spiraleggiamento può essere entrante o uscente.

— o — o —

Esempio 2
$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{8}{3+5x_n} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$



Idea: spiraleggiamento entrante.

PIANO CON LA DISTANZA ... $|f'(x)| = \frac{8 \cdot 5}{(3+5x)^2}$, quindi

$$\max \{|f'(x)| : x \geq 0\} = \frac{40}{9}, \text{ quindi con la dip.}$$

non viene SUBITO.

PIANO CON LE SUCCESSIONI Funziona sicuramente.

Basta verificare che

$$x_0 \leq x_2 \leq 1$$

$$x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{8}{3} \quad x_2 = \frac{8}{3+5x_1} = \frac{8}{3+\frac{40}{3}} = \frac{24}{49}$$

Applicando $f(x)$ ed invertendo i versi trovo a cascata tutte le disuguaglianze che servono.

Volendo salvare il piano con la distanza basta cercare un termine x_{2m_0} tale che

$$\max \{ |f'(x)| : x \geq x_{2m_0} \} < 1$$

a quel p.to la Qip. è con costante < 1 .

Poichè $|f'(1)| = \frac{5}{8}$, per di mettersi abbastanza vicino ad 1, la costante scende sotto 1.