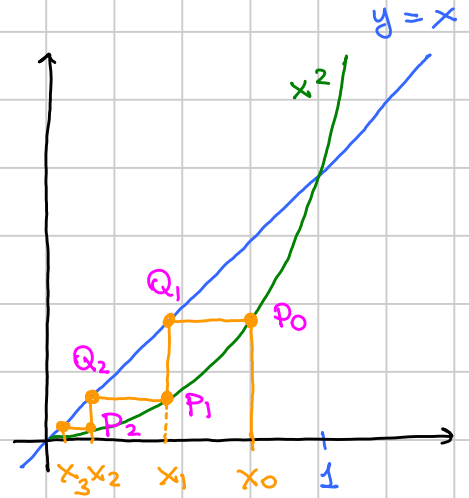


Interpretazione grafica delle succ. per ricorrenza autonoma

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (x_{n+1} = x^2)$$

- Disegno il grafico di  $f(x)$  e la bisettrice  $y = x$
- Disegno il dato  $x_0$  sull'asse  $x$
- Seguo lo SLOGAN: verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice
- Le ascisse dei p.ti che trovo sono  $x_1, x_2, x_3, \dots$



Chi sono i p.ti  $P_0, Q_1, P_1, Q_2, P_2, \dots$  ?

$$P_0 = (x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1) ; \quad Q_1 = (x_1, x_1)$$

stessa di  $P_0$

↓ è uguale alla seconda

$$P_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2) ; \quad Q_2 = (x_2, x_2)$$

↑  
è uguale alla  
x di  $Q_1$

↑  
è sulla  
bisettrice

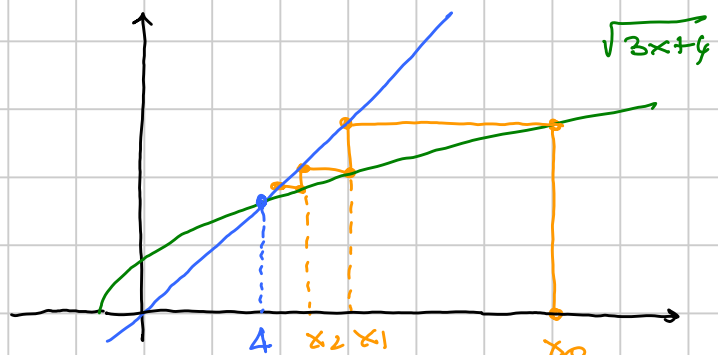
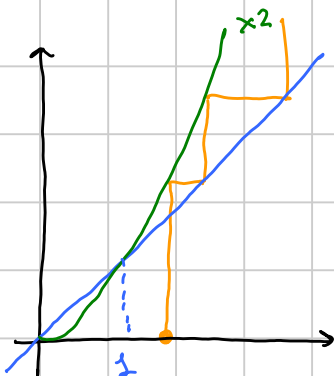
↑  
uguale a  $P_1$

e così via ...

— 0 — 0 —

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}$$



Oss. ① Per stabilire dove si incontrano i due grafici risolvo

$$f(x) = x$$

che è l'equazione del p.to (iv)

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$l = f(l)$$

Conseguenza: se  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ , allora  $l$  è uno dei p.ti di incontro dei 2 grafici.

② Per sapere la posizione di  $f(x)$  rispetto ad  $x$  devo risolvere  $f(x) \geq x$  o  $f(x) > x$ , che sono le disequazioni del p.to (ii) del piano

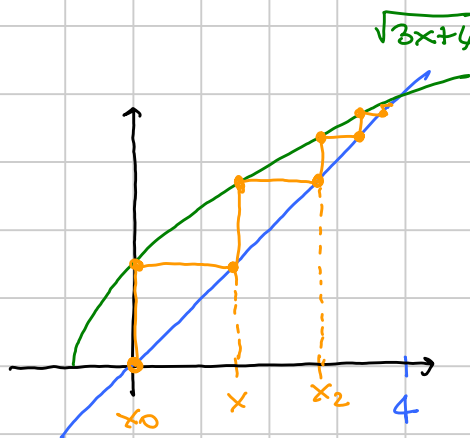
$$x_{n+1} \geq x_n \Leftrightarrow f(x_n) \geq x_n$$

$\uparrow$   
ricomincia  
— o — o —

Esempio

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

- PIANO
- (i)  $0 \leq x_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (ii)  $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  - (iii)  $x_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$
  - (iv)  $l = 4$



La dimostrazione dei vari p.ti è standard.

Sappiamo che  $x_n \rightarrow 4$ . Domanda: come ci rende?

Ad esempio, cosa possiamo dire di

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - 4)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - 4|$$

Esempio  $\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 \\ x_0 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad x_n \rightarrow 0$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n^{2015} x_n}_{a_n} = ?$   $a_n > 0$  (facile inclusione) quindi uso il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2015} \overset{x_{n+1}^2}{x_{n+1}}}{n^{2015} x_n} = \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015}}_{\substack{\downarrow 1 \\ \text{uso ricorrenza}}} \underbrace{x_{n+1}}_{\downarrow 0} \rightarrow 0$$

quindi anche  $a_n \rightarrow 0$ .

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$  Rapporto  $\rightarrow$  radice  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = x_n \rightarrow 0$  (non.)  
quindi  $\sqrt[n]{x_n} \rightarrow 0$

Esempio  $\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{n^{2015} |x_n - 4|}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2015} |x_{n+1} - 4|}{n^{2015} |x_n - 4|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015} \frac{|\sqrt{3x_n + 4} - 4|}{|x_n - 4|}$$

(razionalizzo)  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2015} \frac{3|x_n - 4|}{|x_n - 4| \cdot |\sqrt{3x_n + 4} + 4|} \rightarrow \frac{3}{8}$

Poiché  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{3}{8}$ , allora  $a_n \rightarrow 0$  (criterio del rapporto)

Senza prendere in giro...

$$\frac{|x_{n+1} - 4|}{|x_n - 4|} = \frac{|f(x_n) - f(4)|}{|x_n - 4|} = |f'(c_n)| \rightarrow |f'(4)| = \frac{3}{8}$$

uso  $f(x_n) = x_{n+1}$   
 $f(4) = 4$  Lagrange calcolare la derivata.

Ora  $a_n \rightarrow 4$  per i carabinieri

Piani con la distanza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4} \\ x_0 = 2015 \end{cases}$$

PIANO Pongo  $d_n := |x_n - 4|$  = distanza dal presunto limite

Dimostrare che  $x_n \rightarrow 4$  è equivalente a dim. che  $d_n \rightarrow 0$

(i)  $x_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Facile inclusione come prima

(ii)  $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii)  $d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$

(iv)  $d_n \rightarrow 0$ , cioè  $x_n \rightarrow 4$

Dim. (iv) Dal (iii) sappiamo che

val. assd

$$0 \leq d_n \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n d_0$$

$\downarrow$        $\downarrow$        $\downarrow$

0      0      0      (sarebbe che  $\frac{3}{8} < 1$ )

Dim. (iii) Banale inclusione a partire da (ii)

Dim. (ii) Uso la definizione di  $d_n$ :

ricom. +  $f(4) = 4$

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - 4| \stackrel{\downarrow}{=} |f(x_n) - f(4)|$$

(Lagrange)  $= |f'(c_n)| \cdot \underbrace{|x_n - 4|}_{d_n}$

$$= |f'(c_n)| \cdot d_n$$



Spero che  $|f'(c_n)| \leq \frac{3}{8} \dots$        $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

Ora  $f'(c_n) \leq f'(4) = \frac{3}{8}$

↑  
perché  $c_n \geq 4$  e  
 $f'(x)$  è decrescente

Quindi ho ottenuto che  $d_{n+1} \leq \frac{3}{8} d_n$ .

Oss. Nei piani con la distanza il pto chiave è il (ii) dove serve

$$d_{n+1} \leq \textcircled{C} d_n$$

↑ deve essere minore di 1 e la stessa per ogni  $n$

In pratica  $C$  è il sup di  $|f'(x)|$  nella zona in cui la successione sta.

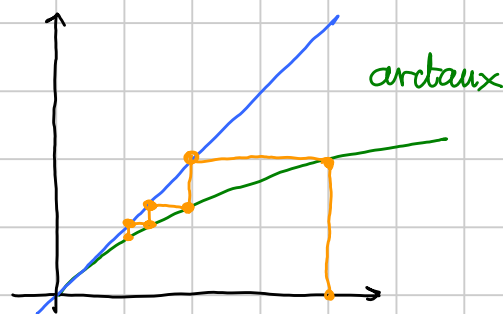
Alla fine è una questione di Lipschitzianità ... perché si arriva a

$$d_{n+1} = |x_{n+1} - l| = |f(x_n) - f(l)| \leq L |x_n - l| = L d_n$$

↑ presunto limite                      ↑ lipsch.

Occhio: se  $L \geq 1$  sono guai

Esempio  $\begin{cases} x_{n+1} = \arctan x_n \\ x_0 = 2015 \end{cases}$



$x_n \rightarrow 0$ , il piano con la monotona  
funzione, quello con la distanza no ( $L=1$ )

— 0 — 0 —

