

Esercizio 1 $\begin{cases} u' = u^4 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Disegnare le soluzioni dell'eqn.

$$\frac{du}{dt} = u^4 \rightsquigarrow \frac{du}{u^4} = dt \rightsquigarrow \int \frac{du}{u^4} = \int dt \rightsquigarrow -\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = t + C$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{u^3} = -3t + C \rightsquigarrow u^3(t) = \frac{1}{C-3t} \rightsquigarrow u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{C-3t}}$$

Impongo $u(0) = \alpha$ e ottengo $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{C}} \rightsquigarrow C = \frac{1}{\alpha^3}$

$$u(t) = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{1-3\alpha^3 t}}$$

Soluzione del pbn. di Cauchy

Nota bene! La formula è OK anche per $\alpha = 0$.

Come è fatta dipende da α . Ci sono 3 casi

$\boxed{\alpha = 0}$ È la soluzione $u(t) \equiv 0$

$\boxed{\alpha > 0}$ C'è blow-up per $1-3\alpha^3 t = 0$, cioè $t = \frac{1}{3\alpha^3}$

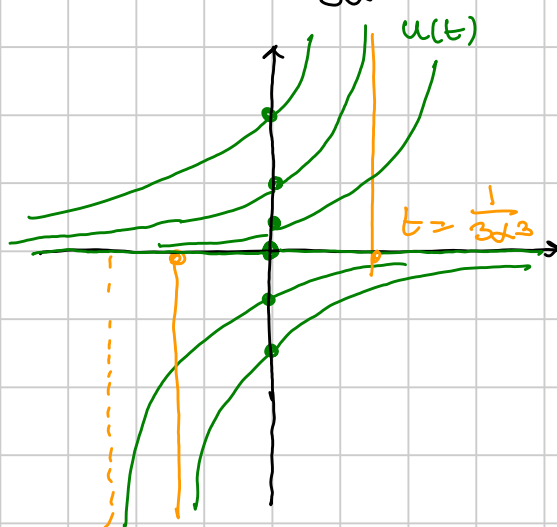
Essendo l'eq. autonoma tutte

le soluzioni con $\alpha > 0$ si ottengono

traslando dx - sx la stessa

Il tempo di vita $\rightarrow 0$ per $\alpha \rightarrow +\infty$

" " " " " ∞ per $\alpha \rightarrow 0$



$\boxed{\alpha < 0}$ La situazione si ribalta, cioè $u(t)$ non ha problemi per $t \rightarrow +\infty$ (tende a 0) e ha blow-up nel passato sempre per $t = \frac{1}{3\alpha^3}$ che ora è negativo.

Formalizziamo la simmetria alto/basso.

Se $u(t)$ è soluzione, allora anche $-u(-t)$ è soluzione

Dim. Pongo $v(t) = -u(-t)$. Allora

$$v'(t) = u'(-t) = u^4(-t) = v^4(t)$$

$\uparrow$
equ. diff.

quindi $v(t)$ risolve la stessa equ. con dato iniziale cambiato di segno $v(0) = -u(0)$

Vedendo dim. che le soluzioni con $\alpha > 0$ sono convesse, senza calcolare la u'' dalla formula, basta usare l'equazione:

$$u' = u^4 \quad \leadsto \quad u'' = 4u^3 u' = 4u^7 > 0 \quad \text{se } u > 0$$

$\uparrow$
 $u' = u^4$
— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u^4 \cdot e^{-t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$ Capite se c'è blow-up

$$\frac{du}{u^4} = e^{-t} dt \quad \leadsto \quad -\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = -e^{-t} + c \quad \leadsto \quad \frac{1}{u^3} = 3e^{-t} + c$$

$$\leadsto u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{-t} + c}} \quad \text{Impongo la cond. iniziale}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{3+c}} \quad \leadsto \quad 3+c = \frac{1}{\alpha^3} \quad \leadsto \quad c = \frac{1}{\alpha^3} - 3$$

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{3e^{-t} + \frac{1}{\alpha^3} - 3}} = \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt[3]{1 + 3\alpha^3(e^{-t} - 1)}}}$$

Da cosa dipende il blow-up per $t \geq 0$? Dall'annullarsi del denom. per $t \geq 0$

$$1 + 3\alpha^3(e^{-t} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{-t} - 1 = -\frac{1}{3\alpha^3} \Leftrightarrow e^{-t} = \boxed{1 - \frac{1}{3\alpha^3}}$$

$\nearrow$ varia tra 0 e 1 quando $t \geq 0$ $\uparrow$ se $\alpha > 0$, questo è < 1

Resta da imporre $1 - \frac{1}{3\alpha^3} > 0 \Leftrightarrow 3\alpha^3 > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \alpha_0$

Quindi abbiamo 3 casi

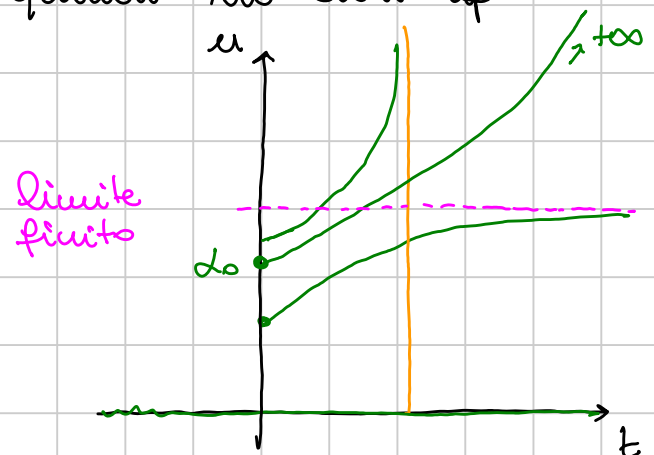
$\boxed{\alpha > \alpha_0}$ $1 - \frac{1}{3\alpha^3} \in (0, 1)$, quindi esiste $t > 0$ t.c. denum $= 0$, quindi c'è blow-up

$\boxed{0 < \alpha < \alpha_0}$ $1 - \frac{1}{3\alpha^3} < 0 \Rightarrow$ non c'è blow up per $t \geq 0$

$\boxed{\alpha = \alpha_0}$ Comunque $1 - \frac{1}{3\alpha^3} = 0$, quindi no blow-up

Per $\alpha = \alpha_0$ la soluzione tende a $+\infty$

Per $\alpha < \alpha_0$ la soluzione ha limite finito.



— 0 — 0 —

Esempio 3
$$\begin{cases} u' - \frac{2}{t}u = t^3 \\ u(1) = \alpha \end{cases}$$

$$a(t) = -\frac{2}{t} \rightsquigarrow A(t) = -2\log t \rightsquigarrow \text{FATT. INT.} = e^{A(t)} = \frac{1}{t^2}$$

Moltiplico per $\frac{1}{t^2}$:

$$\underbrace{\frac{u'}{t^2} - \frac{2}{t^3}u}_{\left(\frac{u}{t^2}\right)'} = t$$

$$\left(\frac{u}{t^2}\right)' = t \rightsquigarrow \frac{u}{t^2} = \frac{1}{2}t^2 + C$$

$$u(t) = \boxed{\frac{1}{2} t^4} + c t^2 \quad \text{Soluzioni generale}$$

$\uparrow$ soluzione della non omogenea
 $\uparrow$ solus. dell' omogenea

Burocraticamente, nel passato (risp. a $t=1$) c'è break down per $t=0$, perché lì l'eq. non ha senso.

In maniera più elastica, $u \in C^1(\mathbb{R})$ e risolve l'eq. per ogni $t \neq 0$

— o — o —

Esempio 4 $u'' + u = f(t)$

Trovare la formula generale.

Conco una sol. speciale per variazioni delle costanti

$$u(t) = a(t) \sin t + b(t) \cos t$$

$$u'(t) = \underline{a'(t) \sin t} + a(t) \cos t + \underline{b'(t) \cos t} - b(t) \sin t$$

$$\boxed{a'(t) \sin t + b'(t) \cos t = 0} \quad 1^a \text{ equ.}$$

$$\begin{aligned}
 u''(t) & \quad a'(t) \cos t - \cancel{a(t) \sin t} - b'(t) \sin t - \cancel{b(t) \cos t} \\
 + u(t) & \quad + \cancel{a(t) \sin t} + \cancel{b(t) \cos t} \\
 = f(t) & \quad = f(t)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{a'(t) \cos t - b'(t) \sin t = f(t)} \quad 2^a \text{ equ.}$$

$$1^a. \sin t + 2^a. \cos t \quad \leadsto \quad a'(t) = f(t) \cos t$$

$$1^a. \cos t - 2^a. \sin t \quad \leadsto \quad b'(t) = -f(t) \sin t$$

Conclusione

$$u(t) = a(t) \sin t + b(t) \cos t$$

$$= \sin t \int f(s) \cos s \, ds - \cos t \int f(s) \sin s \, ds \\ + c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

Si vede ad esempio che, se $f(t) = \sin t$ o $\cos t$, allora
uno dei due integrali diverge per $t \rightarrow +\infty$ (RISONANZA).

— o — o —