

Sistemi di equazioni differenziali

Esempio 1 $\begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = u + 3v \end{cases}$ Le incognite sono 2 funzioni $u(t)$ e $v(t)$

Il problema di Cauchy vuol dire fissare cond. iniziali per $u(t)$ e $v(t)$, ad esempio

$$u(0) = 2$$

↑

stesso tempo

$$v(0) = 3$$

↑

Idea: trasformare il sistema in una singola equazione in una sola incognita.

Derivo la prima eq. : $u'' = 4u' + 2v'$ (sostituisco v' dalla 2^a)

$$= 4u' + 2u + 6v \quad (\text{qui procuro } v \text{ dalla 1^a})$$

$$= 4u' + 2u + 3u' - 12u$$

$$= 7u' - 10u$$

Quindi ho ottenuto:

$$u'' - 7u' + 10u = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0 \quad x=2 \text{ e } x=5$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{5t} \quad \text{Ora trovo } v(t) \text{ sfruttando la 1^a!}$$

$$v(t) = \frac{1}{2} u'(t) - 2u(t) = \frac{1}{2} (2a e^{2t} + 5b e^{5t}) - 2a e^{2t} - 2b e^{5t}$$

$$= -a e^{2t} + \frac{1}{2} b e^{5t}$$

Conclusione: la sol. gen. del sistema è

$$\begin{aligned} u(t) &= a e^{2t} + b e^{5t} \\ v(t) &= -a e^{2t} + \frac{b}{2} e^{5t} \end{aligned}$$

] a e b sono gli stessi sopra e sotto

Se impongo $u(0) = 2$ e $v(0) = 3$ ottengo un sistema

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+\frac{b}{2}=3 \end{cases} \quad \leadsto \text{risolve}$$

Fatto generale: un sistema di 2 eq. di ordine 1 ha dato origine ad una singola equ. di ordine 2.
Sostanzialmente si sommano gli ordini,

Oss. 1 Le cose non cambiano se c'è dipendenza da t .

Oss. 2 Vale sempre il viceversa, cioè è sempre possibile trasformare una qualunque equ. di ordine k in un sistema di k eq. di ordine 1

$$u''' = 7u'' + 5uu' + e^t$$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = w \\ w' = 7w + 5uv + e^t \end{cases}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u''' & u'' & u & u' \end{matrix}$

Moralmente: $\begin{matrix} u' = v \\ u'' = w \end{matrix}$

Conseguenza: se ho una teoria di esistenza / unicità per i sistemi di ordine 1 ce l'ho per le equazioni e per i sistemi di ordine qualunque.

— o — o —

Torniamo al sistema di partenza:

$$\begin{cases} u' = 4u + 2v \\ v' = u + 3v \end{cases}$$

Possiamo pensare che l'incognita sia $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

Ovviamente $U'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$

Posso scrivere il sistema nella forma

$$\boxed{U'(t) = A U(t)} \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Autovalori di A : $\text{Tr } A = 7$ $\text{Det } A = 10$ $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$

Pol. caratt. $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2$
 $= 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$

Gli autovalori della matrice determinano le soluzioni del sistema.

Dagli autovalori si vede anche il comportamento qualitativo delle soluzioni (divergere a $\pm\infty$, convergere a 0, oscillare)

$$\begin{aligned} u(t) &= a e^{2t} + b e^{5t} \\ v(t) &= -a e^{2t} + \frac{b}{2} e^{5t} \end{aligned} \quad U(t) = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{5t}$$

$\uparrow$ autovettore di 2 $\uparrow$ autovettore di 5

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v \\ v' = \lambda v \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dalla 2^a ottengo $v(t) = a e^{\lambda t}$ vado nella 1^a e trovo

$$u' = \lambda u + \underbrace{a e^{\lambda t}}_{\substack{\uparrow \text{ è sol. dell' omogenea, quindi} \\ u(t) = c e^{\lambda t} + d t e^{\lambda t}}}$$

Oss. Brutalmente, se fosse $u'(t) = a u(t)$ la sol. sarebbe
 $u(t) = c e^{at}$

Quando è

$$\underbrace{U'(t)}_{\uparrow \text{ vett.}} = \underbrace{A}_{\uparrow \text{ matr.}} \underbrace{U(t)}_{\uparrow \text{ vett.}} \quad \text{la sol. è} \quad U(t) = e^{At} C$$

$\uparrow$ vettore $\uparrow$ Matrice e $\uparrow$ vettore

$$e^A = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Si calcola facilmente se A è diagonale, altrimenti si diagonalizza
 $\text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---}$

Esempio 2 Trovare per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione dell'eq. diff

$$u'' = \lambda u$$

che verifica le condizioni

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (\text{non è pbm. di Cauchy})$$

Voglio anche che $u(t)$ non sia identicamente nulla

$$\boxed{\lambda > 0} \quad u(t) = a \cosh(\sqrt{\lambda} t) + b \sinh(\sqrt{\lambda} t)$$

Impongo $u(0) = u(1) = 0$. Ottengo

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow b \underbrace{\sinh(\sqrt{\lambda})}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$\Rightarrow$ l'unica possibilità è $u(t) \equiv 0$

$$\boxed{\lambda < 0} \quad u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda} t) + b \cos(\sqrt{-\lambda} t)$$

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow a \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Quindi ho 2 possibilità:

- $a = 0$, ma allora $u(t) \equiv 0$
- $\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$ e questo è possibile $\Leftrightarrow \sqrt{-\lambda} = k\pi$
 $\Leftrightarrow \lambda = -k^2\pi^2 \quad k \in \mathbb{Z}$

In tal caso ho infinite soluzioni della forma

$$u(t) = a \sin(\sqrt{-\lambda} t) = a \sin(k\pi t)$$

$\uparrow$
qualsunque

$\lambda = 0$ La soluz. generale è $u(t) = a + bt$

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$u(1) = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Quindi qui l'unica soluzione è quella nulla $u(t) \equiv 0$.

— 0 — 0 —