

Esempio 1 $u'' + 3u = 0$

Dimostrare che tutte le soluzioni sono limitate e periodiche

$$x^2 + 3 = 0 \quad x = \pm \sqrt{3}i$$

Sol. gen.

$$u(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t)$$

Fissati c_1 e c_2 sulla base dei dati iniziali, avremo

$$|u(t)| \leq |c_1| + |c_2| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Oss. Una funzione del tipo $u(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ si può sempre scrivere come

$$u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ampiezza}}}{C} \sin(\omega t + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fase}}}{\varphi})$$

per opportuni C e φ (tra l'altro $C = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$$\underline{\text{Dim.}} \quad a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\substack{\text{"} \\ \sin \varphi}} \cos(\omega t) + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\substack{\text{"} \\ \cos \varphi}} \sin(\omega t) \right\}$$

Variazione: $u'' + 3u = \sin(\omega t)$. È vero che tutte le soluzioni sono limitate?

La soluzione generale sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2 \cos(\sqrt{3}t)}_{\text{sol. gen. omog.}} + \underbrace{a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{si determinano}}}$$

quindi se le cose vanno così la solus. è limitata!

Le cose vanno così quando $\alpha \neq \pm \sqrt{3}$.

Se invece $\alpha = \pm \sqrt{3}$ la soluzione ha le t davanti:

$$u(t) = c_1 \sin(\sqrt{3}t) + c_2 \cos(\sqrt{3}t) + at \sin(\alpha t) + bt \cos(\alpha t)$$

e questa ha oscillazioni di ampiezza crescente

$$u(t) = C \sin(\sqrt{3}t + \varphi) + C_1 t \sin(\alpha t + \varphi_1)$$

Oss. $u'' + 3u = 0$ rappresenta un oscillatore

$u'' + 3u = f(t)$ rappresenta oscillazioni "forzate", cioè $f(t)$ è una "spinta".

Per produrre una risonanza il termine forzante deve avere lo stesso periodo dell'oscillazione libera.



— o — o —

Esempio 2 $u'' + \alpha u' + 3u = 0$

Prima era $u'' = -3u$

$$u'' = -3u - \alpha u'$$

↑ se α è positivo,

questa rappresenta un attrito



Come sono fatte le soluzioni di $u'' + \alpha u' + 3u = 0$?

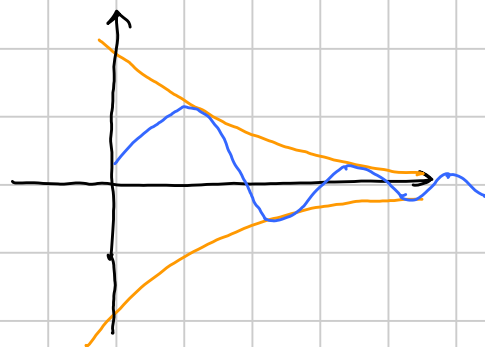
Dipende dal Δ del pd. caratteristico $x^2 + \alpha x + 3 = 0$

- Se $\Delta < 0$, cioè $\alpha^2 - 12 < 0$, allora le radici sono compl. coniugate e quindi

$$u(t) = c_1 e^{at} \sin(pt) + c_2 e^{at} \cos(pt)$$

Quindi $a = -\frac{\alpha}{2}$. Se $\alpha > 0$ le soluzioni tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$ continuando ad oscillare

$$u(t) = e^{-\frac{\alpha}{2}t} C \sin(pt + \varphi)$$



• se $\Delta > 0$, cioè $\alpha^2 - 4 > 0$, allora le radici del pol. caratt. sono

due numeri reali $\lambda < 0$ e $\mu < 0$

(il prodotto è 3, la somma è $-\alpha$), quindi la solus. generale è

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\mu t}$$

$\nwarrow \nearrow$
 tendono a 0 senza oscillare
 — 0 — 0 —

Esempio 3 $\begin{cases} u' - 2u = \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Domanda: come si comporta la soluzione al variare di α .

La formula esplicita NON si trova. Uso la formula generale

$$u(t) = \alpha e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds$$

Calcolare il limite per $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{2t} \left\{ \alpha + \int_0^t e^{-2s} \arctan s \, ds \right\}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

$\downarrow$
 $+\infty$

$\int_0^{+\infty} e^{-2s} \arctan s \, ds = \text{integrale improprio}$

L' integrale improprio converge perché

$$0 \leq e^{-2s} \arctan s \leq \frac{\pi}{2} e^{-2s} \quad \text{no confronto}$$

Detto $I_\infty = \text{valore dell' integrale improprio}$, abbiamo 3 casi!

Caso 1 $\alpha + I_\infty > 0$, cioè $\alpha > -I_\infty$. In questo caso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = +\infty$$

Caso 2 Se $\alpha < -I_\infty$, allora $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = -\infty$.

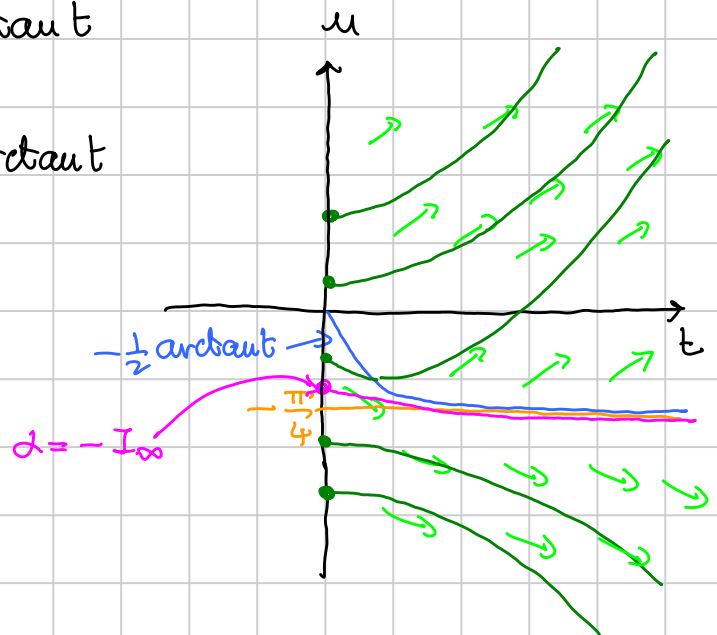
Caso 3 Se $\alpha = -I_\infty$, cioè $\alpha + I_\infty = 0$, allora il limite è una forma indeterminata $+\infty \cdot 0$ e lo calcoliamo con l'Hôpital

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \int_0^t \dots}{e^{-2t}} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-2t} \operatorname{arctan} t}{-2e^{-2t}} = -\frac{\pi}{4}$$

Interpretazione $u' = 2u + \operatorname{arctan} t$

$$2u + \operatorname{arctan} t > 0 \Leftrightarrow u > -\frac{1}{2} \operatorname{arctan} t$$



— o — o —