

Eq. diff. del primo ordine (a coeff. variabili)

$$u' + a(t)u = b(t)$$

Formula per la soluzione generale: detta $A(t)$ una qualunque primitiva di $a(t)$

$$u(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(s)} b(s) ds$$

↑
costante
arbitraria

↑
una qualunque primitiva

Se in aggiunta ho una cond. iniziale $u(t_0) = u_0$, allora la soluzione del p.b.v. di Cauchy è

$$u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds$$

↑ ora ci sono gli estremi

dove $A(t)$ è LA primitiva di $a(t)$ che fa 0 in t_0 , cioè

$$A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

Conseguenza: si sa determinare la soluzione, a patto di saper fare le primitive di

$$a(t) \quad \text{e} \quad e^{A(t)} b(t).$$

Piano: ① Dim. che la formula funziona

② Dare due giustificazioni del perché viene in mente.

Dim. $u(t) = u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds$

dove $A'(t) = a(t)$ e $A(t_0) = 0$.

Controllo il dato iniziale: $u(t_0) = u_0 \cdot e^0 + e^0 \cdot 0 = u_0$ Ok.

Calcolo $u'(t)$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= u_0 e^{-A(t)} (-a(t)) - a(t) e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds \\ &\quad + \cancel{e^{-A(t)}} \cancel{e^{A(t)}} b(t) \\ &= -a(t) \left\{ u_0 e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(s)} b(s) ds \right\} + b(t) \\ &= -a(t) u(t) + b(t), \end{aligned}$$

cioè $u(t)$ risolve l'equazione. $\square$

Prima giustificazione: metodo del FATTORE INTEGRANTE

$$u'(t) + a(t) u(t) = b(t)$$

Moltiplico LHS e RHS per $e^{A(t)}$ ← FATTORE INTEGRANTE

$$u'(t) e^{A(t)} + u(t) a(t) e^{A(t)} = b(t) e^{A(t)}$$

$$\left[u(t) e^{A(t)} \right]' = b(t) e^{A(t)}$$

Facendo la primitiva a dx e sx trovo

$$u(t) e^{A(t)} = \int b(s) e^{A(s)} ds + c$$

$$\underbrace{c'(t)e^{-A(t)} - \cancel{c(t)a(t)e^{-A(t)}}}_{\bar{u}'(t)} + \cancel{a(t)c(t)e^{-A(t)}} = b(t)$$

$$\bar{u}'(t) + a(t)\bar{u}(t)$$

resta $c'(t)e^{-A(t)} = b(t) \leadsto c'(t) = b(t)e^{A(t)}$

$$\leadsto c(t) = \int b(s)e^{A(s)} ds$$

$$\leadsto \bar{u}(t) = c(t)e^{A(t)} = \boxed{e^{A(t)} \int b(s)e^{A(s)} ds}$$

↑ secondo pezzo della formula generale

Esempio 1 $u' + tu = t^3$ $a(t) = t \leadsto A(t) = \frac{1}{2}t^2$

Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

Moltiplico per il FI il LHS e il RHS:

$$\underbrace{u'e^{\frac{1}{2}t^2} + tu e^{\frac{1}{2}t^2}} = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$\left[u e^{\frac{1}{2}t^2} \right]' = t^3 e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$u(t) e^{\frac{1}{2}t^2} = \int t^3 e^{\frac{1}{2}t^2} dt = \int t^2 \cdot t e^{\frac{1}{2}t^2} dt$$

Pongo $y = \frac{1}{2}t^2$, quindi $dy = t dt$ $= \int 2y e^y dy$

$$= 2 [y e^y - \int e^y dy] = 2 [y e^y - e^y] = 2 e^y (y - 1)$$

$$= 2 e^{\frac{1}{2}t^2} \left(\frac{1}{2}t^2 - 1 \right) + c$$

Ricavando: $\boxed{u(t) = c e^{-\frac{1}{2}t^2} + t^2 - 2}$ soluzione generale

Modo alternativo: omogenea + tentativo

$$u' + tu = t^3$$

① Risolvo l'omogenea: $u' + tu = 0$, $u' = -tu$

$$\frac{du}{dt} = -tu \rightsquigarrow \frac{du}{u} = -t dt \rightsquigarrow \log|u| = -\frac{1}{2}t^2 + c$$

$$\rightsquigarrow |u(t)| = e^{-\frac{1}{2}t^2 + c} \rightsquigarrow u(t) = ce^{-\frac{1}{2}t^2}$$

② Per risolvere la uue omogenea, provo con il tentativo

$$u(t) = at^2 + bt + c$$

$$u'(t) = 2at + b$$

Sostituisco nell'equazione e ottengo

$$\underbrace{2at + b}_{u'} + \underbrace{t(at^2 + bt + c)}_{+tu} = t^3$$

$$a = 1$$

coeff. di t^3

$$a = 1 \text{ e } c = -2$$

$$b = 0$$

coeff. di t^2

quindi una soluzione speciale è

$$2a + c = 0$$

coeff. di t

speciale è

$$b = 0$$

termine noto

$$u(t) = t^2 - 2$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $u' + u = 7$

Ci sono almeno 3 modi di risolverla:

① $u' = 7 - u$ e la consideriamo a variabili separabili

② Formula generale per equ. del 1° ordine

③ Lineare a coeff. costanti $\rightsquigarrow$ pd. caratt. + tentativo

$$u(t) = 7 + ce^{-t}$$

↑

$$x+1=0 \rightsquigarrow x=-1$$