

Equazioni diff. lineari non omogenee (a coeff. costanti)

$$\underbrace{\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)}}_{Lu} = f(t)$$

Già visto: la soluzione gen è del tipo

$$u(t) = \underbrace{\bar{u}(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{sd. qualunque eq. non omog.}}} + \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_k u_k(t)}_{\text{sd. gen. equaz. omog.}}$$

Fin qui vale anche se i coeff. sono variabili.

Per determinare $\bar{u}(t)$, conviene "andare a occhio".

Esempio 1 $u'' + 7u' + 12u = e^{2t}$

Cerco una solus. del tipo $u(t) = \alpha e^{2t}$
 $\uparrow$
 coeff. incognito

Fatto generale: se il RHS è del tipo $e^{\lambda t}$, allora il tentativo da fare è $u(t) = \alpha e^{\lambda t}$.
 (anche 7^t è del tipo...)

Questo NON funziona se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico. In quel caso il tentativo da fare è $u(t) = \alpha t^m e^{\lambda t}$, dove m è la molteplicità di λ come radice del pol. caratteristico

sostituire fanno venire LHS = 0

$$\underbrace{u'' - 2u' + u = e^t}_{x^2 - 2x + 1 \text{ ha radice } x=1 \text{ con mult. } 2} \quad \boxed{u(t) = \alpha e^t, \quad u(t) = \alpha t e^t, \quad u(t) = \alpha t^2 e^t}$$

$$2a + 14at + 7b + 12at^2 + 12bt + 12c = t^2 + 5$$

$$\begin{cases} 12a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 14a + 12b = 0 & \text{coeff. } t \\ 2a + 7b + 12c = 5 & \text{termine noto} \end{cases} \quad \text{(Viene fuori sempre un sistema triangolare)}$$

Fatto generale: se il RHS è un polinomio, provo con $u(t) = \text{pol. dello stesso grado a coeff. incogniti}$.

Questo NON funziona se e solo se $x=0$ è soluzione dell'eq. caratteristica, nel qual caso occorre moltiplicare tutto per t^m .

Esempio 4 $u''' - u'' = t^2$ $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

Tentativo da fare: $u(t) = t^2 (at^2 + bt + c)$
 $= at^4 + bt^3 + ct^2$

Se usassi $u(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ non riuscirei a determinare (ovviamente) d ed e .

$$u'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct, \quad u''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$$

$$u'''(t) = 24at + 6b$$

Sostituisco

$$24at + 6b - 12at^2 - 6bt - 2c = t^2$$

$$\begin{cases} -12a = 1 & a = -\frac{1}{12} \\ 24a - 6b = 0 & -2 - 6b = 0 \leadsto b = -\frac{1}{3} \\ 6b - 2c = 0 & 2c = 6b \leadsto c = 3b = -1 \end{cases}$$

Soluzione generale:

$$u(t) = -\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \underbrace{ae^t + b + ct}_{\text{sol. gen. omogenea}}$$

Altri possibili RHS

① Se c'è $p(t)e^{\lambda t}$ con $p(t)$ polinomio, provo con

$$u(t) = e^{\lambda t} \cdot \text{pol. dello stesso grado a coeff. incogniti}$$

② Se c'è $p(t) \sin(\lambda t)$, provo con

$$u(t) = \sin(\lambda t) \cdot \text{polinomio} + \cos(\lambda t) \cdot \text{polinomio}$$

③ Se c'è $\cos(\lambda t) \cdot e^{\mu t}$, provo con

$$u(t) = (a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t)) e^{\mu t}$$

$\uparrow$ coeff. incogniti $\uparrow$

④ Se il RHS è la somma di più termini che si sanno trattare, allora risolvono separatamente e sommo le soluzioni.

Dim. $Lu_1 = f_1$ e $Lu_2 = f_2 \Rightarrow L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2$
per linearità.

— o — o —

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Esempio $u'' + 2u' - 3u = e^{2t}$ $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

La soluzione dell'omogenea è $u(t) = a e^t + b e^{-3t}$

$\uparrow$ costanti $\uparrow$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t) e^t + b(t) e^{-3t}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
faccio variare le costanti

$$u'(t) = \underbrace{a'(t)e^t + a(t)e^t}_{\text{deriva solo due termini}} + \underbrace{b'(t)e^{-3t} - 3b(t)e^{-3t}}$$

$$\boxed{a'(t)e^t + b'(t)e^{-3t} = 0} \quad \text{1ª equazione}$$

$$u''(t) = a'(t)e^t + a(t)e^t - 3b'(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$$

↑
deriva solo due termini

Sostituisco u'' , u' e u nell'equazione iniziale:

$$\begin{array}{l} u''(t) \quad a'(t)e^t + a(t)e^t - 3b'(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t} \\ + 2u'(t) \quad + 2a(t)e^t - 6b(t)e^{-3t} \\ - 3u(t) \quad - 3a(t)e^t - 3b(t)e^{-3t} \end{array} = e^{2t}$$

I termini con $a(t)$ e $b(t)$ DEVONO annullarsi. Resta

$$\boxed{a'(t)e^t - 3b'(t)e^{-3t} = e^{2t}} \quad \text{2ª equazione}$$

Mettendo insieme le 2 equazioni trovo

$$\begin{cases} a'(t)e^t + b'(t)e^{-3t} = 0 \\ a'(t)e^t - 3b'(t)e^{-3t} = e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{Risolvo: } 4b'(t)e^{-3t} = -e^{2t} \rightsquigarrow b'(t) = -\frac{1}{4}e^{5t}$$

$$4a'(t)e^t = e^{2t} \rightsquigarrow a'(t) = \frac{1}{4}e^t$$

$$\rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{4}e^t, \quad b(t) = -\frac{1}{20}e^{5t} \quad (\text{primitive qualunque})$$

$$u(t) = a(t)e^t + b(t)e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{4}e^t \cdot e^t - \frac{1}{20}e^{-3t} \cdot e^{5t} = \frac{1}{4}e^{2t} - \frac{1}{20}e^{2t} = \frac{1}{5}e^{2t}$$

Oss. Quando ho sostituito u'' , u' e u se ne sono andati i termini con $a(t)$ e $b(t)$ perché erano del tipo

$$a(t) \underbrace{L(e^t)}_0 + b(t) \underbrace{L(e^{-3t})}_0$$

perché e^t ed e^{-3t} sono soluzioni dell'eq. omogenea

Si può verificare che il sistema finale in $a'(t)$ e $b'(t)$ ha sempre soluzione, cioè $\det \neq 0$.

— 0 — 0 —