

Equazione omogenea a coeff. costanti

$$\sum_{i=0}^k a_i u^{(i)}(t) = 0$$

↑
costanti, cioè numeri

Esiste un algoritmo per trovare esplicitamente una base dello spazio delle soluzioni.

Polinomio caratteristico :

$$\sum_{i=0}^k a_i x^i$$

Algoritmo : equazione $\leadsto$ pol. car. $\leadsto$ radici $\leadsto$ base.

↑
Il polinomio ha grado k , quindi k radici complesse pensate con molteplicità.

Caso delle equazioni con $k=2$ Il pol. è ax^2+bx+c

Ci sono 3 casi

1° caso Due radici reali distinte : λ, μ . Allora una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t}$, quindi la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}$$

Dim. Verifica che sono soluz. e sono lin. indep.. L'equazione è

$$a u''(t) + b u'(t) + c u(t) = 0$$

Prendiamo $u(t) = e^{\lambda t}$, $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sostituendo

$$e^{\lambda t} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

$= 0$ perché λ è radice

Verifico che sono lin. indep. in ogni intervallo.

Supponiamo che

$$c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t} = 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2)$$

Prendo $t_0 \in (t_1, t_2)$ e allora dovrà essere

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda t_0} + c_2 e^{\mu t_0} &= 0 && \text{La funzione si annulla} \\ \lambda c_1 e^{\lambda t_0} + \mu c_2 e^{\mu t_0} &= 0 && \text{La derivata si annulla} \end{aligned}$$

Questo implica $c_1 = c_2 = 0$ perché $\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \neq 0$
↑
VANDERMONDE

— o — o —

2° caso Due radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una base è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

quindi la sol. gen. è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Dim. I conti da fare sono gli stessi di prima, è solo più scomodo fare le derivate (fare una volta per esercizio)

Passando per i complessi... uno vorrebbe scrivere

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$$e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) - i \sin(\beta t))$$

Facendo semisomma e semidifferenza si ottiene una nuova base, che è quella di prima.

— o — o —

3° caso Una radice reale λ di molteplicità 2.
Una base è

$$e^{\lambda t} \quad t e^{\lambda t}$$

quindi la soluzione generale è

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}$$

Dica. Derivare e sostituire ... e poi verificare la linearità indipendenza

Brutal mode: prendiamo il caso con 2 radici reali distinte.

Una base è $e^{\lambda t}$, $e^{\mu t}$

Un'altra base è

$$e^{\lambda t}, \quad \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}$$

" $e^{\mu t}$

$$\frac{e^{(\lambda - \mu)t} - 1}{\lambda - \mu}$$

— o — o —

Cosa succede nel caso generale? Se l'eq. è di ordine n , il polinomio caratteristico ha grado n , quindi n radici in un opportuno senso e

- una radice reale λ produce $e^{\lambda t}$ se ha mult. 1
- una coppia di radici $\alpha \pm i\beta$ produce $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$
- una radice reale λ di molteplicità m produce m elementi

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

- una coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di mult. m produce $2m$ elementi

$$\begin{array}{ccccccc} e^{\lambda t} \cos(\beta t), & t e^{\lambda t} \cos(\beta t), & \dots, & t^{m-1} \dots \\ e^{\lambda t} \sin(\beta t), & t e^{\lambda t} \sin(\beta t), & \dots, & t^{m-1} \dots \end{array}$$

Esempio 1

$$u'' + 3u' = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x = 0, x = -3$$

$$u(t) = a e^{0t} + b e^{-3t} = a + b e^{-3t}$$

Esempio 2

$$u'' + 3u = 0$$

$$x^2 + 3 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{3} i$$

$$\alpha = 0, \beta = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= a e^{0t} \cos(\sqrt{3}t) + b e^{0t} \sin(\sqrt{3}t) \\ &= a \cos(\sqrt{3}t) + b \sin(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

Esempio 3

$$u'' + u = 0 \quad \leadsto \quad u(t) = a \cos t + b \sin t$$

$$u'' - u = 0 \quad \leadsto \quad x^2 - 1 = 0 \quad \leadsto \quad x = \pm 1$$

$$\begin{aligned} u(t) &= a e^t + b e^{-t} \quad \text{MA ANCHE} \\ u(t) &= a \cosh t + b \sinh t \end{aligned}$$

$$\text{Span}(e^t, e^{-t}) = \text{Span}(\cosh t, \sinh t)$$

Esempio 4

$$u^{(5)} + 9u^{(3)} = 0$$

$$x^3 + 9x^3 = 0$$

$$x^3(x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0 \quad x = \pm 3i$$

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t) + c + dt + et^3$$

$x=0$ ha molteplicità 3

— 0 — 0 —

Metodi per determinare una soluzione di un'eq. non omogenea

- ① Provare a indovinare (comodissimo se riesce)
- ② Metodo di variazione delle costanti (riesce sempre, ma è una valanga di calcoli)

Esempio 1

$$u'' + 3u' + 2u = e^{7t}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

La soluzione la cerco del tipo $u(t) = \alpha e^{7t}$

$$u'(t) = 7\alpha e^{7t}$$

$$u''(t) = 49\alpha e^{7t} \quad \dots \text{ sostituisco}$$

$$49\alpha e^{7t} + 21\alpha e^{7t} + 2\alpha e^{7t} = e^{7t}$$

$$72\alpha = 1 \quad \alpha = \frac{1}{72}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = \frac{1}{72} e^{7t} + a e^{-2t} + b e^{-t}$$

Esempio 2

$$u'' + 3u' + 2u = e^{-2t}$$

Cosa succede se vado a sostituire $u(t) = \alpha e^{-2t}$? Viene 0 !!!

In questo caso il tentativo giusto è $u(t) = \alpha t e^{-2t}$
— 0 — 0 —