

Perché funziona la procedura per trovare la soluzione generale

$$u' = f(t) \cdot g(u)$$

Oss. Se $g(u_0) = 0$, allora $u(t) \equiv u_0$ è una soluzione dell'equazione (basta sostituire)

In pratica: se la condizione iniziale annulla la g , allora ^{UNA} la soluzione è quella costante

Dim. 1 della procedura Consideriamo il pbm di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Supponiamo $f: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: (u_0 - r, u_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ ed $r > 0$.

Supponiamo che $g(u_0) \neq 0$ (altrimenti la soluz. è costante).

Supponiamo di sapere già che la soluzione esiste.

Poiché $g(u(t_0)) \neq 0$, per continuità sarà vero che

$$g(u(t)) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

per un opportuno $\delta_1 > 0$. Considero l'eq. diff.

$$u'(t) = f(t) \cdot g(u(t)) \quad \forall t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

Posso dividere per $g(u(t))$ ottenendo

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = f(t) \quad \forall t \in (t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1)$$

Preso un qualunque $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, integro LHS e RHS nella variabile t tra t_0 e t

$$\int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \int_{t_0}^t f(s) ds$$

Ora indico con $F(t)$ una primitiva di $f(t)$, cioè $F'(t) = f(t)$
e indico con $\Gamma(u)$ una primitiva di $\frac{1}{g(u)}$, cioè $\Gamma'(u) = \frac{1}{g(u)}$

Allora RHS = $F(t) - F(t_0)$ e

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \int_{t_0}^t \frac{u'(s)}{g(u(s))} ds = \text{Pongo } x = u(s), \text{ quindi } dx = u'(s) ds \\ &\quad \text{Quando } s = t_0 \rightsquigarrow x = u(t_0) = u_0 \\ &\quad \quad \quad s = t \rightsquigarrow x = u(t) \\ &= \int_{u_0}^{u(t)} \frac{1}{g(x)} dx \\ &= \Gamma(u(t)) - \Gamma(u_0) \end{aligned}$$

In conclusione abbiamo ottenuto

$$\Gamma(u(t)) = F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)$$

è il c del brutale dei termini delle condizioni iniziali

Brutalmente: ① $\frac{du}{dt} = f(t) \cdot g(u) \rightsquigarrow \frac{du}{g(u)} = f(t) dt$

② $\int \frac{du}{g(u)} = \int f(t) dt \rightsquigarrow \Gamma(u) = F(t) + c$

— o — o —

Dim 2 della procedura Tutto come sopra, ma non supponiamo di sapere già che la soluzione esiste.

Definisco Γ e F come sopra. Considero l'uguaglianza

$$\Gamma(u) = F(t) - F(t_0) + \Gamma(u_0)$$

Posso ricavare u , almeno per valori di t vicini a t_0 , perché

$T(u)$ è una funzione monotona (essendo primitiva di $\frac{1}{g}$ che non si può annullare)

$$u(t) = T^{-1}(F(t) - F(t_0) + T(u_0))$$

Dico che $u(t)$ è una soluz. del pbm. di Cauchy fino a dove è definita.

Verifica della cond. iniz.: $u(t_0) = T^{-1}(T(u_0)) = u_0$

Verifica dell'equazione:

$$u'(t) = (T^{-1})'(F(t) - F(t_0) + T(u_0)) \cdot f(t)$$

↑
funzione composta

$$= \frac{1}{T'(T^{-1}(F(t) - F(t_0) + T(u_0)))} \cdot f(t)$$

↑
funzione
inversa

$$= g(T^{-1}(F(t) - F(t_0) + T(u_0))) \cdot f(t)$$

↑
 $T' = \frac{1}{g}$

$$= g(u(t)) \cdot f(t)$$

— o — o —

Oss. La dimostrazione 2 mostra l'esistenza senza assumere teoremi misteriosi

La dimostrazione 1 mostra l'unicità, usando solo la continuità e non la dip. di g , fino a quando $g(u(t)) \neq 0$

— o — o —

Esempio $\begin{cases} u' = u^4 \cdot \cos t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ Studiare il comportamento al variare di α

$$\boxed{1-2-3} \quad \frac{du}{dt} = u^4 \cdot \cos t \rightsquigarrow \frac{du}{u^4} = \cos t \, dt$$

$$\int \frac{du}{u^4} = \int \cos t \, dt = -\frac{1}{3} \frac{1}{u^3} = \sin t + c \rightsquigarrow u^3 = \frac{-1}{3 \sin t + c}$$

$$u(t) = - \frac{1}{\sqrt[3]{3 \sin t + C}}$$

Soluzione generale

④ Condizione iniziale: $\alpha = u(0) = - \frac{1}{\sqrt[3]{C}} \leadsto C = - \frac{1}{\alpha^3}$

Soluz. prob. di Cauchy

$$u(t) = - \frac{1}{\sqrt[3]{3 \sin t - \frac{1}{\alpha^3}}} = \frac{\alpha}{\sqrt[3]{1 - 3\alpha^3 \sin t}} \quad \text{VERIFICA !!}$$

⑥ Tutto dipende da α , cioè dall'avere soluzioni dell'eq. $1 - 3\alpha^3 \sin t = 0$.
 $\sin t = \frac{1}{3\alpha^3}$

- Se $-1 \leq \frac{1}{3\alpha^3} \leq 1$, allora l'equazione ha soluzioni per cui la soluzione ha blow-up in tempo finito
- Se siamo nell'altro caso, allora la soluzione ha esistenza globale.

EFFETTO SOGLIA:

Sopra $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \leadsto$ BLOW-UP
 SOTTO: $\leadsto$ esistenza globale



Oss. Non è possibile avere soluzioni limitate per α grandi e soluzioni non limitate per α piccoli



Oss. Poiché $u(t) \equiv 0$ è una soluzione e siamo nelle ipotesi di unicità, per forza chi parte > 0 resta sempre > 0
 < 0 < 0

