

Criterio di DIRICHLET Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

Supponiamo che

(i) $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $b_{n+1} \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(iii) $b_n \rightarrow 0$

(iv) esiste $M \in \mathbb{R}$ t.c. $\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora la serie risultante converge

Oss. Dirichlet $\Rightarrow$ Leibnitz. Basta porre $a_n = (-1)^n$ e osservare che le somme parziali di a_n sono alternativamente 1 e 0.

— 0 — 0 —

Esercizio Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha che

$$I_n := \int_0^{+\infty} \underbrace{x^n e^{-x}}_{f(x)} dx < +\infty$$

e calcolare esplicitamente I_n .

Dim. Unico pbm. a $+\infty$. Per studiare la convergenza faccio il C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} e^{-x} \rightarrow 0 \text{ caso limite}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \text{ quindi vicino al pbm. } \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1, \text{ quindi } f(x) \leq g(x) \right]$$

L'integrale di $g(x) = \frac{1}{x^2}$ con p.b.m. a $+\infty$ converge $\Rightarrow I_n < +\infty$ qualunque sia n .

Per calcolare I_n integro per parti

$$\begin{aligned} \int_0^A \underset{G}{x^n} \underset{f}{e^{-x}} dx &= \left[\underset{F}{-e^{-x}} \cdot \underset{G}{x^n} \right]_0^A - \int_0^A \underset{F}{(-e^{-x})} \underset{g}{n \cdot x^{n-1}} dx \\ &= -A^n e^{-A} + n \int_0^A x^{n-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Passando al limite per $A \rightarrow +\infty$, per $n \geq 1$ si ottiene

$$I_n = n I_{n-1}$$

D'altra parte si verifica facilmente che $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$.

Da queste relazioni si ricava che

$$I_n = n!$$

Def. Si dice funzione GAMMA di EULERO la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e soddisfa la relazione $\Gamma(n) = (n-1)!$

È l'estensione naturale del fattoriale ai numeri reali.

Oss. 1 Come sopra si dimostra la relazione

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

che è l'analogo della relazione ricorrente per $(n-1)!$

Oss. 2

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Pongo $x^2 = y$, cioè $x = \sqrt{y}$
 $\leadsto dx = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y} dy = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Quindi $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
— o — o —

Esercizio Sia $[a, b]$ un intervallo, sia $c \in (a, b)$

Considero due successioni

$$k_n \rightarrow c^-$$

$$l_n \rightarrow c^+$$

Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$.

Pongo

$$I_n = \int_a^{k_n} f(x) dx + \int_{l_n}^b f(x) dx$$

Allora $I_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$

Dim.

$$\int_a^b f(x) dx - I_n = \int_{k_n}^{l_n} f(x) dx$$

↑
additività rispetto alla
zona di integrazione

Quindi $\left| \int_a^b f(x) dx - I_n \right| = \left| \int_{k_n}^{l_n} f(x) dx \right| \leq \int_{k_n}^{l_n} |f(x)| dx$

$$\leq M(l_n - k_n) \rightarrow 0$$

↑
essendo $f(x)$ limitata
esiste un tale M

Perché RHS $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, anche LHS $\rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$
— o — o —

Domanda: resta ancora vero l' enunciato se $f(x)$ è integrabile
sdo in senso improprio con un problema in c ?

La risposta è sì solo se non si ammettono compensazioni tra $+\infty$ e $-\infty$.

Dim. $I_{ab} = \int_a^{k_n} f(x) dx + \int_{l_n}^b f(x) dx$ se c'è un pon. in c

↓

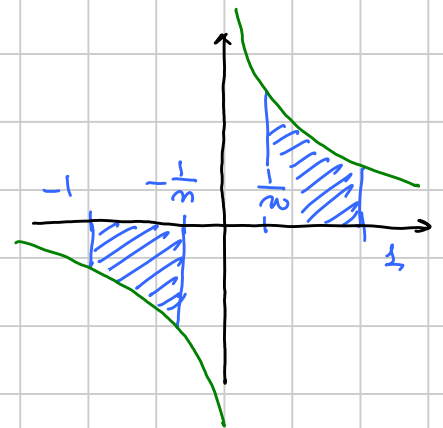
$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

e avevamo definito l'int. improprio su $[a, b]$ come la somma dei due integrali nonproblema,

Esempio $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx$

Se faccio "buco simmetrico", allora

$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \dots + \int_{\frac{1}{n}}^1 \dots = 0 \rightarrow 0$$

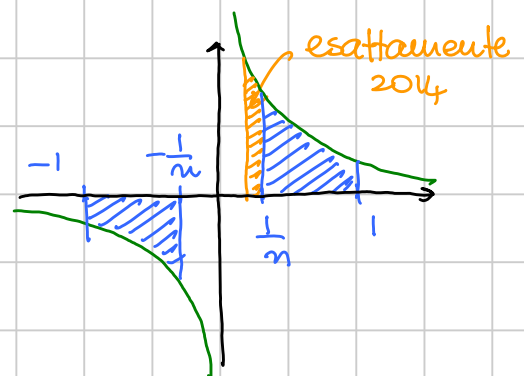


Se faccio "buco asimmetrico", tipo $k_n = -\frac{1}{n}$ e $l_n = \frac{2}{n}$, allora

$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \dots + \int_{\frac{2}{n}}^1 \dots = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{-1}^{-\frac{1}{n}} + \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \right]_{\frac{2}{n}}^1$$

$$= -\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{4} = -\frac{3}{8} n^2 \rightarrow -\infty$$

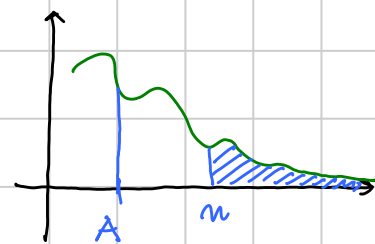
Posso fare un buco opportuno in modo che $I_n \rightarrow 2014$.



Esercizio Supponiamo che $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ converga.

Allora la successione

$$I_n := \int_n^{+\infty} f(x) dx$$



è ben definita e $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

la "coda" dell'integrale
improprio tende a 0.

Dim. I_n è ben definito non appena $n \geq A$.

Spesso in 2 parti l'integrale improprio

$$\int_A^{+\infty} f(x) dx = \int_A^n f(x) dx + \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

↑
si dimostra
facilmente

Quindi

$$I_n = \int_A^{+\infty} f(x) dx - \int_A^n f(x) dx \rightarrow 0$$

↓
per def. di int. improprio
tende a $\int_A^{+\infty}$

Analogamente $I_n = \int_n^{m^2} f(x) dx$

$$I_n = \int_A^{m^2} f(x) dx - \int_A^n f(x) dx$$
$$\downarrow$$
$$\int_A^{+\infty} f(x) dx - \int_A^{+\infty} f(x) dx = 0$$

Nelle ipotesi in cui
l'integrale improprio
converge

(Trovare facili controesempi
altrimenti)