

INTEGRALI OSCILLANTI

Esempi classici

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

$$\int_0^{+\infty} |\sin(x^2)| dx$$

Metodi

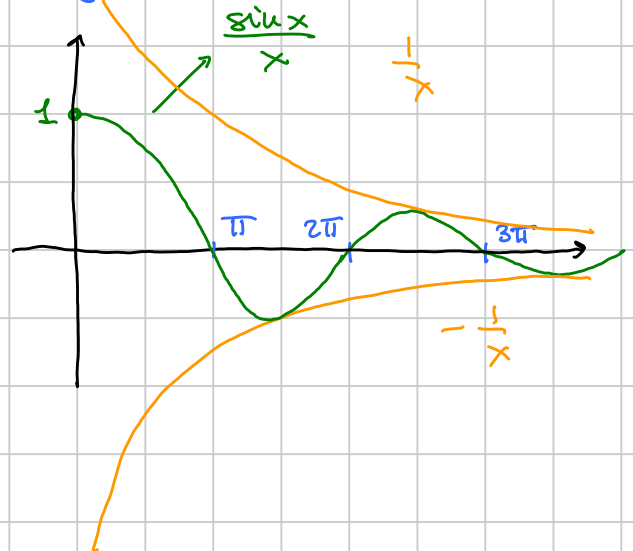
→ Trucco dell'integrazione per parti

→ Metodo dei triangolini (o dei rettangolini)

(le serie aiutano gli integrali)

Esempio 1

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{f(x)} dx$$



Prima osservazione: l'unico pbm. è a $+\infty$ perché vicino a 0 la funzione è limitata

L'assoluta convergenza non fornisce risultati immediati

$$\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\int \frac{1}{x} dx$ con pbm. a $+\infty$ diverge $\Rightarrow$ BOH

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^T \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{numero (integ. proprio)}} + \int_T^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

↑
ora studio questo

Studio solo il secondo

$$\int_7^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_7^A \sin x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$\begin{matrix} f & g \end{matrix}$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{-\cos x}{x} \right]_7^A - \int_7^A (-\cos x) \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right)$$

$\begin{matrix} F & G \end{matrix}$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 7}{7} - \int_7^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

$$= \frac{\cos 7}{7} - \int_7^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$\downarrow$
 0

Se dimostro che converge l'ultimo, ho dimostrato la convergenza di quello che volevo. Per questo uso l'assoluta integrabilità.

Osservo che

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \forall x \geq 7$$

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_7^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \text{ converge} \Rightarrow \int_7^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$
 confronto tra int.
 impropri con integranda
 ≥ 0

$\uparrow$
 assoluta
 integrabilità

Più in generale Allo stesso modo si dimostra che

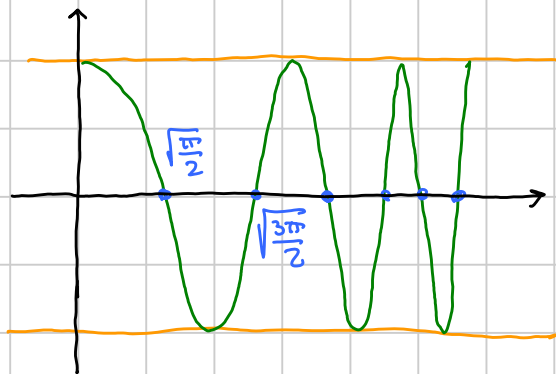
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a} dx \text{ converge per ogni } a > 0 \quad (\text{occhio al p.b. in } x=0)$$

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx \text{ converge per ogni } a > 0$$

occhio che $\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$ diverge banalmente perché $\sim \frac{1}{x}$

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

Anche qui



$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{\int_0^{\tau}}_{\text{numero}} + \int_{\tau}^{+\infty} \dots \quad \uparrow \text{da studiare}$$

$$\int_{\tau}^{+\infty} \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^A \cos(x^2) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{\sin(x^2)}{2x} \right]_{\tau}^A}_{GF} - \underbrace{\int_{\tau}^A \sin(x^2) \left(-\frac{1}{2x^2} \right) dx}_F \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\downarrow 0} - \frac{\sin(49)}{14} + \frac{1}{2} \int_{\tau}^A \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \right\}$$

$$= - \underbrace{\frac{\sin(49)}{14}}_{\downarrow \text{Numero}} + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(x^2)}{x^2}}_{\downarrow} dx$$

Numero

Numero perché l'integrale converge assolutamente.

Allo stesso modo si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^a) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^a) dx \quad \text{convergono} \quad \forall a > 1$$

(provare a vedere cosa bisogna aggiungere davanti)

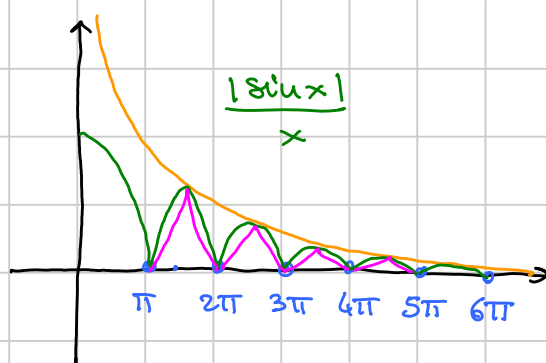
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^a)}{x} dx \quad \text{converge per ogni } a > 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

Ponzo sotto il grafico dei triangolini T_n che hanno

- base $[n\pi, (n+1)\pi]$
- vertice che si proietta sul centro della base, quindi in $f(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$



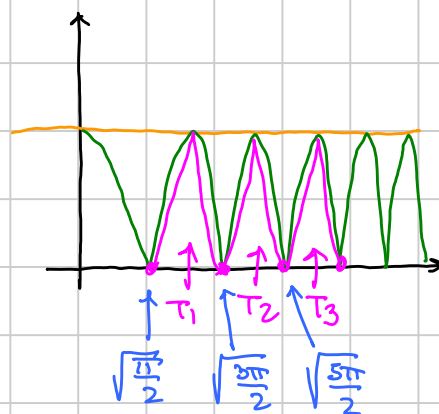
Per ragioni geometriche si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\pi}_{\text{base}} \underbrace{\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}}_{\text{altezza}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = +\infty$$

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx$

Ora i triangolini hanno

- altezza = 1
- base di $T_n = \left(\sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}}, \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right)$



Quindi come prima

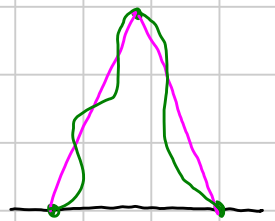
$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \right)}_{\text{lungh. base}} = \dots$$

$$\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots} = \frac{\pi}{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}} \sim \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \text{ e quindi la serie diverge}$$

In alternativa: la serie è telescopica e la somma parziale n -esima è

$$S_n = \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rightarrow +\infty$$

Osservazione Non è così ovvio che il Δ sta sotto la funzione.

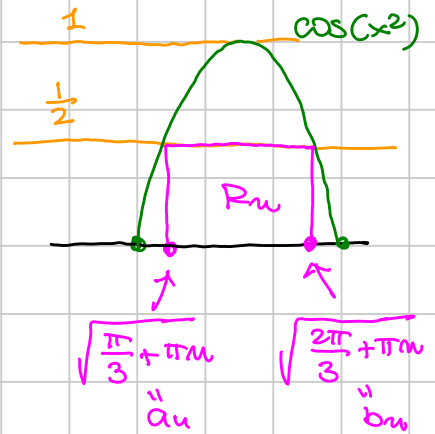


Come rimediare?

1° modo: dimostrarlo per bene con studio di funzione

2° modo: piazzare sotto un rettangolino

$$|\cos(x^2)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + \pi n \\ \frac{2\pi}{3} + \pi n \end{cases}$$



$$\text{Ora } \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(R_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(b_n - a_n)}_{\sim \frac{1}{\sqrt{n}}} = +\infty$$

Oss. $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ converge

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$

↓
esempio in cui l'integrale converge, ma $f(x) \rightarrow 0$ all' ∞

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \underbrace{A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 \dots}_{\substack{\text{compensazione} \\ \text{"leibnitziana"}}}$$

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \dots$$

