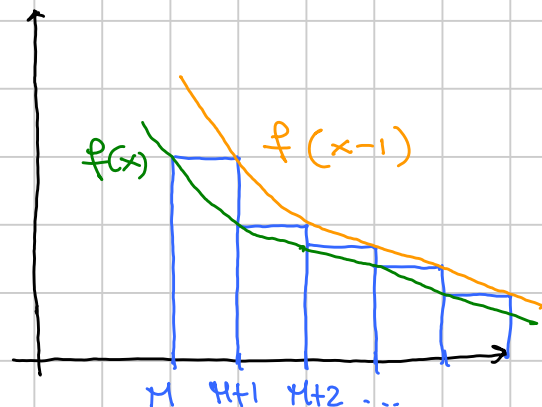


# CONFRONTO SERIE - INTEGRALI (Gli integrali aiutano le serie)

Sia  $M \in \mathbb{N}$ , sia  $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione debolmente decrescente con  $f(x) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

Allora



$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \leq f(M) + \int_M^{+\infty} f(x) dx$$

Infatti nel disegno:

- la serie è la somma delle aree dei rettangoli
- l'integrale a sx è l'area sotto il grafico di  $f(x)$
- a dx c'è l'area del primo rettangolo più l'area sotto il grafico di  $f(x-1)$  tra  $M+1$  e  $+\infty$ .

$$\int_{M+1}^{+\infty} f(x-1) dx = \int_M^{+\infty} f(y) dy$$

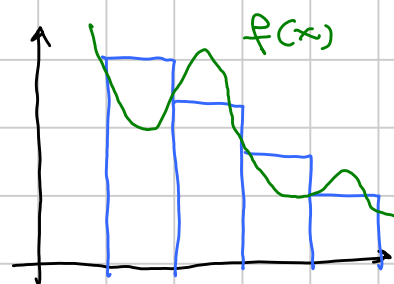
$\uparrow$   
 $x-1=y$

Data per buona la disuguaglianza, concludiamo che

$$\sum_{n=M}^{+\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Ipotesi:  $f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) > 0$  per ogni  $x \geq M$   
 $f(x)$  debolmente decrescente

Oss. Se salta la debole decrescenza, non posso confrontare le aree



Dim Disug.  $\Rightarrow$  confronto serie - int

- Se l'integrale converge, quando la disug. di  $dx$
  - Se l'integrale diverge, quando la disug. di  $dx$ .
- o — o —

Per dimostrare per bene la disuguaglianza, dovrei definire la funzione  $g(x)$  costante a tratti

$$g(x) = f(n) \quad \forall x \in [n, n+1)$$

e la funzione

$$R(x) = \begin{cases} f(M) & \text{per } x \in [M, M+1) \\ f(x-1) & \text{per } x \geq M+1 \end{cases}$$

Dovrei poi dimostrare che

$$f(x) \leq g(x) \leq R(x) \quad \forall x \geq M$$

Cosa che segue facilmente dalla debole decrescenza di  $f(x)$ .  
Infine osservare che

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \int_M^{+\infty} g(x) dx \leq \int_M^{+\infty} R(x) dx$$

e osservare che i 3 termini sono esattamente i 3 termini che compaiono nella disuguaglianza iniziale

— o — o —

## Applicazione classica

①  $f(x) = \frac{1}{x^a}$  con  $M=1$ . Questa verifica le hp, quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx \text{ conv.} \Leftrightarrow a > 1$$

$\uparrow$  serie - aut.                       $\uparrow$  dim. con la primitiva

②  $f(x) = \frac{1}{x \log^a x}$  con  $M=2$ . Conclusioni come sopra.

Esempio 1 Stimare le somme parziali per le serie armoniche generalizzate

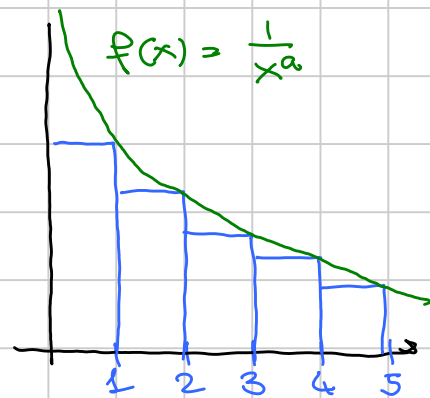
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \quad \text{con } a > 1$$

Per  $a > 1$  sappiamo che  $S_n$  è limitata superiormente. Da che cosa?

Considero  $f(x) = \frac{1}{x^a}$ . Allora

$$S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^a} dx$$

$\uparrow$  primo rettangolo                       $\uparrow$  rettangoli da 1 a n



$$\begin{aligned} \text{da cui} \quad S_n &\leq 1 + \left[ \frac{1}{1-a} \frac{1}{x^{a-1}} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-a} \frac{1}{n^{a-1}} - \frac{1}{1-a} \\ &= \frac{a}{a-1} + \frac{1}{1-a} \frac{1}{n^{a-1}} \end{aligned}$$

$$S_n \leq \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} \frac{1}{n^{a-1}} \quad \forall n \geq 1$$

Provare a vedere che succede a dim. per induzione

Esempio 2 Per  $a \leq 1$ , si può stimare come cresce la somma parziale della serie armonica generalizzata, per esempio

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \quad S_n \rightarrow +\infty, \text{ ma come?}$$

Ora sappiamo che  $S_n \sim 2\sqrt{n}$ .

Basta fare confronto serie - integrali con  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Esempio 3  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$

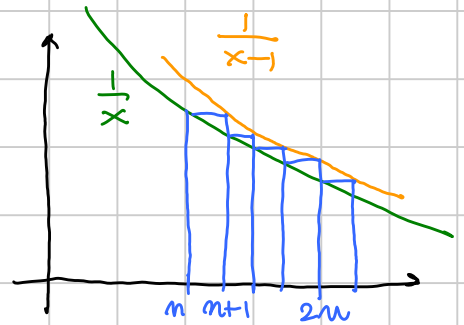
Detto meglio, posto  $a_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ , calcolare  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Sotto-esercizio: dimostrare che il limite esiste, ma senza calcolarlo, usando limitatezza + monotonia.

Brutal mode:  $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{2n} \frac{1}{x} dx = \log(2n) - \log n = \log 2$

Rigorosamente:

$$\begin{aligned} \int_n^{2n+1} \frac{1}{x} dx &\leq a_n \leq \int_n^{2n+1} \frac{1}{x-1} dx \\ \log(2n+1) - \log n &\leq a_n \leq \log(2n) - \log(n-1) \\ \log\left(\frac{2n+1}{n}\right) &\leq a_n \leq \log\left(\frac{2n}{n-1}\right) \\ \downarrow &\quad \downarrow \\ \log 2 &\quad \log 2 \end{aligned}$$



Esempio 4  $a_n = \sum_{k=n}^{3n} \arctan \frac{1}{k}$

Ultra-brutal mode:  $a_n \sim \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} \sim \int_n^{3n} \frac{1}{x} dx \sim \log 3$

La disuguaglianza facile è

$$a_n \leq \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} \quad \leftarrow \text{si stima come prima con l'integrale}$$

uso  $\arctan x \leq x$

Serve una disuguaglianza dall'altra parte

$$\arctan x \geq x - \frac{1}{3}x^3 \quad \forall x > 0$$

si dimostra con  
lo studio di  
funzioni

$$\arctan \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \frac{1}{k^3}$$

$$a_m \geq \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \sum_{k=m}^{3m} \frac{1}{k^3}$$

## Concludendo

$$\sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k^3} \leq a_n \leq \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$$

$\downarrow \log 3$ 
 $\downarrow$  per "facile" confronto
  $\downarrow \log 3$ 
 $\downarrow \log 3$

## Fatto generale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

Se voglio calcolare il valore approssimato:

→ sommo un po' di fermi a mano

→ stimo l'errore, cioè la somma dei restanti termini, con un opportuno confronto serie-integrali.