

Integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a > 1 \\ +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases}$$

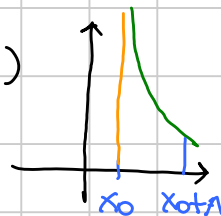
Oss. 1 Se cambio l'estremo $\pm$ con un qualunque $A \in (0, +\infty)$ le cose non cambiano

Oss. 2 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = +\infty$ per ogni a

Cosa succede se il problema è in un p.to $x_0 \neq 0$?

Basta spostare il problema in 0 con un cambio di variabili !

$$\int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{div. a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases} \quad (A > 0)$$



$$\int_{x_0-A}^{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^a} dx = \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases}$$



Dim. Brutalmente : pongo $x-x_0=y$, quindi $dx=dy$

$$x = x_0 \rightsquigarrow y = 0$$

$$x = x_0 + A \rightsquigarrow y = A$$

$$\int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a} dx = \int_0^A \frac{1}{y^a} dy \quad \text{e quindi è fatta}$$

Domanda: posso usare il cambio di variabili ?

Rigorosamente, uso la definizione

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+A} \frac{1}{|x-x_0|^a} dx \\ &\quad \uparrow \text{def.} \quad \quad \quad \uparrow \text{cambio di variabili in integrale proprio} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^A \frac{1}{|y|^a} dy \\ &= \int_0^A \frac{1}{y^a} dy \\ &\quad \uparrow \text{def.} \end{aligned}$$

Esempio 1 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$

Problema a $+\infty$ Converge perché $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$. Rigorosamente
dovrei fare C.A. con
 $g(x) = \frac{1}{x^2}$

Problema in $x=1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$$

colpevole
dell'improprietà
dell'integrale

nessun problema
in $x=1$

Di conseguenza, si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ con problema in 1,
quindi converge perché $a = \frac{1}{2} < 1$.

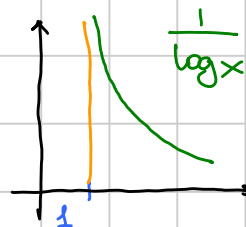
Rigorosamente! C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Mi riduce a fare

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = \frac{1}{2} \neq 0 \neq +\infty$$

problema

Quindi i 2 integrali hanno stesso comportamento

Esempio 2 $\int_1^3 \frac{1}{\log x} dx$ Pongo $y = x-1$



$$= \int_0^2 \frac{1}{\log(1+y)} dy = +\infty$$

Diverge per C.A. con $\frac{1}{y}$ ($\log(1+y) \sim y$)

Donci fare $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y)}{g(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\log(1+y)} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2 \sqrt{x}} dx$

Problema in $x=0$ $\frac{\sin(x^2)}{x^2 \sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ quindi converge

Occhio: per usare il C.A. mi serve che $f(x) > 0$ vicino al problema, il che in questo caso è vero.

Problema a $+\infty$ L'integranda non è a segno costante, quindi non pensare nemmeno a fare

$\frac{\sin(x^2)}{x^2 \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2 \sqrt{x}}$, quindi converge NO!!!

Bisogna passare attraverso l'assoluta integrabilità

$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x}} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ ← confronto tra integrande ≥ 0

$\int \frac{|\sin(x^2)|}{x^2 \sqrt{x}} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ ← Assoluta integrabilità

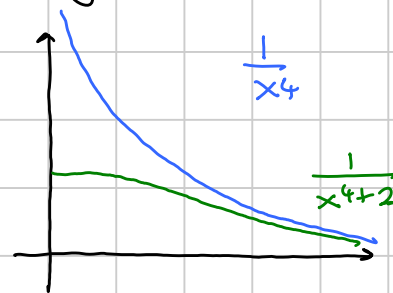
$\int \frac{\sin(x^2)}{x^2 \sqrt{x}} dx$ con problema a $+\infty$ converge

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+2} dx$ si comporta come $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx$ quindi diverge

no!! Il confronto vale solo per l'integrale con problema a $+\infty$

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+2} dx$ ha unico pbm. a $+\infty$, quindi si comporta come $\int \frac{1}{x^4} dx$ con unico pbm. a $+\infty$, quindi converge

L'approx. $\frac{1}{x^4+2} \sim \frac{1}{x^4}$
 è "buona" per $x \rightarrow +\infty$,
 ma pessima per $x \rightarrow 0^+$.



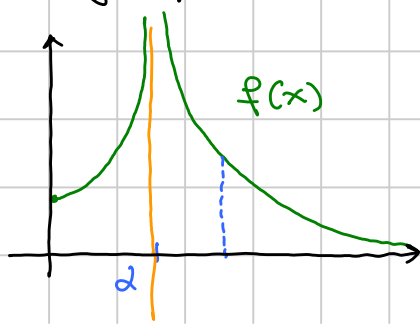
Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{|x^7+3x^4-2|}} dx$

Sicuramente c'è un pbm. a $+\infty$, ma anche un altro (almeno) prima. Infatti, posto $g(x) = x^7+3x^4-2$, si ha $g(0) = -2$ e $g(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, quindi c'è almeno uno zero in mezzo.

Ora $g'(x) = 7x^6 + 12x^3 \geq 0$ per $x \geq 0$ con annullamento solo per $x=0$, quindi c'è un unico $\alpha > 0$ tale che $g(\alpha) = 0$. Una formula per α non c'è.

L'integrale va scomposto in 3 pezzi: $\int_0^\alpha \dots + \int_\alpha^{\alpha+1} \dots + \int_{\alpha+1}^{+\infty} \dots$

L'ultimo converge per C.A. con $\frac{1}{x^{7/2}}$ (il pbm. è a $+\infty$)



Ora $f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-a}}$ per $x \rightarrow a^+$. Se fosse così, avrei che

i primi due integrali convergono entrambi.

Rigorosamente: devo fare il c.a. con $\frac{1}{\sqrt{x-a}}$, cioè calcolare

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \cdot \sqrt{x-a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{\frac{x-a}{x^7+3x^4-2}}$$

↑
non metto 1-1 perché
 $g(x) > 0$ per $x > a$

Il limite dentro la radice è una forma del tipo $\frac{0}{0}$, quindi si può calcolare con De L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x-a}{x^7+3x^4+2} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{7x^6+12x^3} = \frac{1}{7a^6+12a^3} \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

e quindi gli integrali si comportano allo stesso modo.

Fatto generale: se $g(a) = 0$ e $g'(a) \neq 0$, allora

$g(a+R) = g'(a) \cdot R + o(R)$

↑
questo è quello che abbiamo
usato

— o — o —