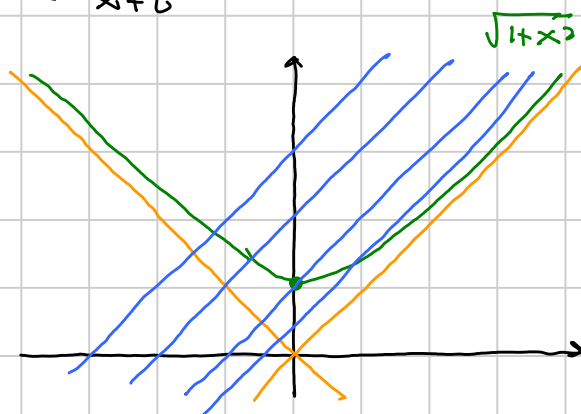


Interpretazione delle sostituzioni razionalizzanti

Esempio 1 $\int \sqrt{1+x^2} dx$ $\sqrt{1+x^2} = x+t$

Graficamente cosa rappresentano?

$\sqrt{1+x^2}$ è un ramo di iperbole

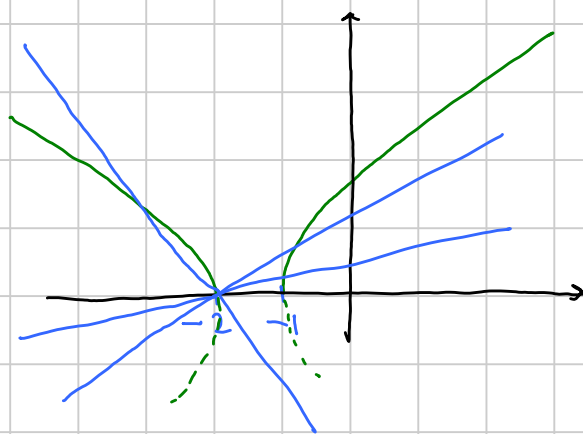


$x+t$ è una famiglia di rette parallele ad uno degli asintoti. Ogni retta incontra l'iperbole in un p.to solo. Le coordinate di quel punto sono una funzione razionale di t .

Esempio 2 $\int \sqrt{x^2+3x+2} dx$ $\sqrt{x^2+3x+2} = t(x+2)$

$\sqrt{x^2+3x+2}$ è un'iperbole pure questa

$t(x+2)$ è la famiglia di rette che passano per il p.to $(-2,0)$



Per ogni t , la retta ha con l'iperbole 2 intersezioni:

- una fissa in $(-2,0)$
- una variabile

Se io conosco una intersezione (sd. eq. di 2° grado) conosco per forza anche l'altra (conosco somma e prodotto delle radici) e per calcolarla non ho bisogno di radici, quindi è una funzione razionale del parametro.

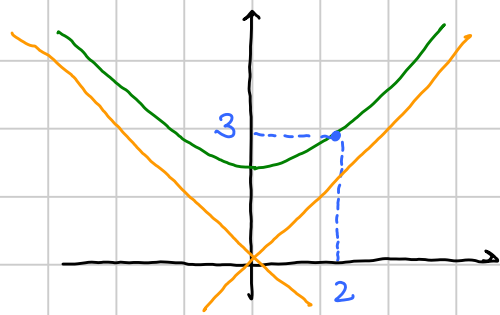
Esempio 3

$$\int \sqrt{5+x^2} dx$$

Metodo creativo

$$\sqrt{5+x^2} = 3 + t(x-2)$$

fascio di rette
per il pto (2,3)



Ricavo x :

$$5 + x^2 = 9 + t^2(x-2)^2 + 6t(x-2)$$
$$(x+2)(x-2) = t^2(x-2)^2 + 6t(x-2)$$

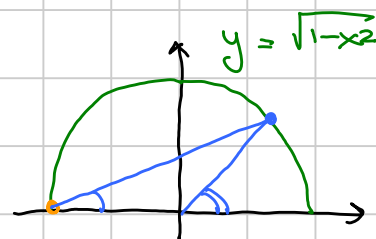
È di 1° grado in x , quindi posso calcolare x e ottengo una funzione razionale di t . A quel punto anche y è una funzione razionale di t , dx pure e ho concluso.

— o — o —

Parametrizzazione di una curva. Data una curva nel piano (nel vostro caso il grafico dell'integranda), una parametrizzazione sono due funzioni $(x(t), y(t))$ definite per $t \in D \subseteq \mathbb{R}$ tali che

- per ogni $t \in D$ il pto $(x(t), y(t))$ sta sulla curva
- ogni pto della curva si scrive come $(x(t), y(t))$ per un qualche $t \in D$.

Esempio Come la posso parametrizzare?



1° modo : $(t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [-1, 1]$

2° modo : $(\cos t, \sin t)$ $t \in [0, \pi]$

3° modo : considero la famiglia di rette per il pto $(-1, 0)$

$y = t(x+1)$. Vado ad intersecare:

$$t(x+1) = \sqrt{1-x^2} \quad t^2(x+1)^2 = (1-x)(1+x)$$

$$x(t^2+1) = 1-t^2 \quad \boxed{x = \frac{1-t^2}{1+t^2}} \quad \text{ora}$$

$$y = t(x+1) = t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2} = y}$$

Un integrale con $\int \text{Rat}(\sin x, \cos x)$ lo posso portare in

$\int \text{Rat}(x, \sqrt{1-x^2})$ e a sua volta posso usare la parametrizzazione della circ. data dalla famiglia di rette per $(-1, 0)$

Def. Una curva si dice razionale se ammette una parametrizzazione fatta da funzioni razionali.

Fatto generale: se il grafico di $f(x)$ è una curva razionale, allora c'è una sostituzione razionalizzante per

$$\int f(x) dx$$

Esercizio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Sia $F(x)$ la sua primitiva con $F(0)=0$

Supponiamo che $f(x) = o(x^{2014})$ per $x \rightarrow 0$.

Posso dire

① $f'(x) = o(x^{2013})$ per $x \rightarrow 0$? **NO**

② $F(x) = o(x^{2015})$ per $x \rightarrow 0$? **SI**

Per ① prendo $f(x) = x^{2015} \sin\left(\frac{1}{x^{30}}\right)$ $f(0)=0$

Se derivo prendo un bel po' di ordini di x $f'(x) = o(x^{2015-31})$

Per il ② finalmente ... Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^{2015}} \stackrel{[0/0], \text{Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2015 x^{2014}} \stackrel{f(x) = o(x^{2014})}{=} 0 \quad \square$$