

Esempio 1 $\int \frac{dx}{x^2-1}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Come trovo A e B?

1° modo Sistema lineare $\frac{1}{x^2-1} = \frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}$

$$A+B=0 \quad (\text{coeff. } x)$$

$$-A+B=1 \quad (\text{termine noto})$$

$$B = \frac{1}{2}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

2° modo Moltiplico per $x+1$: $\frac{1}{x-1} = A + B \frac{x+1}{x-1}$
 pongo $x=-1$ e trovo $A = -\frac{1}{2}$

Moltiplico per $x-1$: $\frac{1}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B$. Pongo $x=1$ e trovo $B = \frac{1}{2}$

Oss. Il secondo modo funziona anche con tanti termini e anche quando ci sono fattori di 2° grado, ma bisogna sostituire ad x le radici complesse coniugate.

Finale: $\int \frac{1}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx$
 $= -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| = \log \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$

Esempio 2 $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$

Pongo $y = e^x \rightarrow dy = e^x dx$

$$= \int \frac{1}{y^2-1} dy = \log \sqrt{\frac{|y-1|}{|y+1|}} = \log \sqrt{\frac{|e^x-1|}{e^x+1}}$$

Oss. Con lo stesso sistema si calcolano le primitive del tipo

$\int \text{Raz}(e^x) dx$
 ← funzione razionale

Esempio 3 $\int \frac{1}{e^{2x}-1} dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^{2x}-1)} dx$ $y=e^x \leadsto dy=e^x dx$

$$= \int \frac{1}{y(y^2-1)} dy \quad \text{e questo si fa...}$$

$$\frac{1}{y(y^2-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} + \frac{C}{y-1}$$

Molt. per y e pongo $y=0 \leadsto A=-1$

Molt. per $y+1$ e pongo $y=-1 \leadsto B=\frac{1}{2}$

Molt. per $y-1$ e pongo $y=1 \leadsto C=\frac{1}{2}$

} Verifica!

$$= -\log|y| + \frac{1}{2} \log|y+1| + \frac{1}{2} \log|y-1|$$

$$= -x + \frac{1}{2} \log(e^x+1) + \frac{1}{2} \log|e^x-1| \quad (\text{Verifica!})$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx$ Pongo $y=e^x, dy=e^x dx$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{e^x}{e^x(e^{2x}+1)} dx = \int \frac{dy}{y(y^2+1)} \quad \text{e si divide}$$

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1} = \dots$$

Metodo alternativo Pongo $y=e^{2x}, dy=2e^{2x} dx$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}(e^{2x}+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y(y+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \frac{1}{2} \log|y| - \frac{1}{2} \log|y+1|$$

$$= x - \frac{1}{2} \log(1+e^{2x}) \quad \text{Verifica!}$$

— o — o —

Esempio 5 $\int \frac{8^x}{2^x+5} dx$ Pongo $y=2^x \leadsto dy=2^x \log 2 dx$

$$= \frac{1}{\log 2} \int \frac{y^2}{y+5} dy \quad \text{si fa.}$$

Esempio 6 $\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2} dx$

Pongo $y = \sqrt{x} \leadsto dy = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$$= 2 \int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2} \sqrt{x} \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} dx} = 2 \int \frac{y^2+3}{y+2} y dy$$

dy

Pongo $x = y^2 \leadsto dx = 2y dy$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x}+2} \boxed{dx} = \int \frac{y^2+3}{y+2} \boxed{2y dy}$$

Si finisce facilmente

Esempio 7 $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x}+2} dx$

Pongo $x = y^3 \leadsto dx = 3y^2 dy$

$$= \int \frac{y^3+3}{y+2} \cdot 3y^2 dy \leadsto \text{si fa con la divisione}$$

Esempio 8 $\int \frac{\sqrt{x+1} + x}{\sqrt[3]{x+1} + 2} dx$

Pongo $y = x+1 \leadsto dy = dx$

$$= \int \frac{\sqrt{y} + y - 1}{\sqrt[3]{y} + 2} dy$$

Pongo $y = z^6 \leadsto dy = 6z^5 dz$

$$= \int \frac{z^3 + z^6 - 1}{z^2 + 2} 6z^5 dz \text{ e da qui si finisce}$$

Fatto generale: se ci sono tante radici una con indici diversi, basta usare il minimo comune multiplo degli indici, MA gli argomenti delle radici devono essere gli stessi

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} + 2} dx$$

Pongo $\sqrt{x+1} = y \leadsto x = y^2 - 1 \leadsto dx = 2y dy$

$$= \int \frac{\sqrt{y^2-1} + 1}{y+2} 2y dy$$

Esempio 9 $\int \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} dx$ Pongo $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

Idea buona: quando vado a ricavare è di 1° grado in x !!!

$$y^2 = \frac{x+3}{x-2}, \quad (x-2)y^2 = x+3, \quad x(y^2-1) = 3+2y^2$$

quindi $x = \frac{3+2y^2}{y^2-1}$ da cui $dx = \left(\frac{3+2y^2}{y^2-1} \right)' dy$

Quindi dopo il cambio di variabili trovo

$$\int \underset{G}{y} \left(\underset{F}{\frac{3+2y^2}{y^2-1}} \right)' dy = \underset{G}{y} \cdot \underset{F}{\frac{3+2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{\frac{3+2y^2}{y^2-1}} \underset{F}{dy}$$

Fatto generale: quando un integrale contiene $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, più eventualmente potenze di x , si può porre la radice $= y$ e funziona la stessa tecnica.

Esempio 10 $\int \frac{x^2}{x^4+1} dx$ bisogna fare l'algoritmo generale

Devo scomporre x^4+1 come prodotto di 2 polinomi di 2° grado.

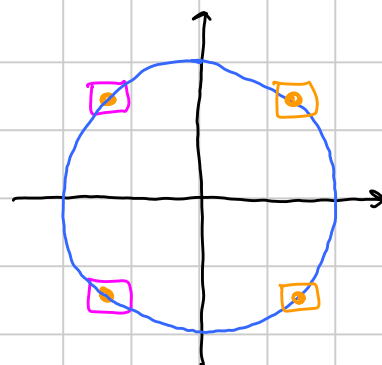
1° modo Passo attraverso le radici complesse: $x^4 = -1$, cioè

$$x = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \quad x = \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}} \quad \text{e accoppiandole trovo la fatt. reale}$$

$$x = a \pm ib \rightsquigarrow x^2 - 2ax + (a^2+b^2)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \rightsquigarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 \quad \leftarrow$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \rightsquigarrow x^2 + \sqrt{2}x + 1 \quad \leftarrow$$



2° modo Senza passare per i complessi

$$\begin{aligned}x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = \underbrace{(x^2 + 1)^2}_{A^2} - \underbrace{(\sqrt{2}x)^2}_{B^2} \\&= (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \\&\quad \underbrace{(A+B)} \quad \underbrace{(A-B)}\end{aligned}$$

Esercizio Vedere come fattorizzare $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$,
— o — o —