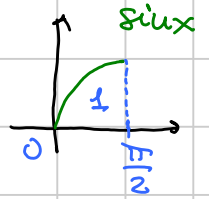
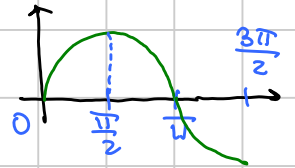


Esempio 1 $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$



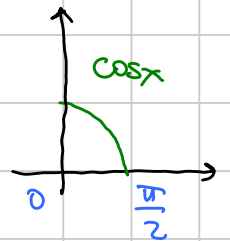
Ocdio ai seguiti, ma bisogna essere consapevoli che viene >0 in quando l'integranda è ≥ 0 e non identicamente nulla nella zona di integrazione

Esempio 2 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$



$\int_0^{3\pi/2} \sin x \, dx = 1$

Esempio 3 $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$



Per ridursi all'esempio 1 uso un cambio di variabili

$y = \frac{\pi}{2} - x$ da cui $dy = -dx$

Cambio gli estremi: quando $x=0$ ho $y = \frac{\pi}{2}$, quando $x = \frac{\pi}{2}$ ho $y=0$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_{\pi/2}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) (-dy) = - \int_{\pi/2}^0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) dy$$

$\uparrow$ inverti gli estremi

$\equiv$ sin y

$$= \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy$$

Esempio 4 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$

1° modo Calcolo la primitiva sfruttando $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \dots$$

2° modo Sfrutto la simmetria, cioè

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad (\text{stessa dim. dell'esempio 3})$$

Chiamo I il valore comune. Ora

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}$$

e quindi $I = \frac{\pi}{4}$

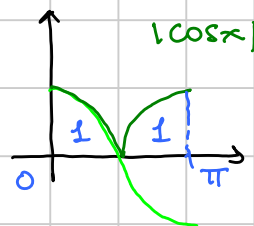
Fatto generale Per ogni $R \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}$ vale la relazione

$$\int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{R\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{R\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = (R-k) \frac{\pi}{4}$$

Integrale di $\sin^2 x$ o $\cos^2 x$ = metà lunghezza della zona di integrazione

Achtung! Non vale se gli estremi non sono multipli di $\frac{\pi}{2}$.

Esempio 5 $\int_0^{\pi} |\cos x| \, dx = 2$



$$\int_0^{\pi} |x \cos x| \, dx$$

Evitare cose creative, tipo
primitiva di $|f(x)| \neq | \text{primitiva di } f(x) |$

Procedimento sicuro: dividere l'integrale a seconda del segno dell'argomento del valore assoluto

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |x \cos x| \, dx &= \int_0^{\pi/2} |x \cos x| \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |x \cos x| \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \cos x \, dx \end{aligned}$$

$$\int \underset{G}{x} \underset{f}{\cos x} dx = \underset{G}{x} \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{\sin x} \underset{F}{dx} = \underset{G}{x} \underset{F}{\sin x} + \cos x \quad (\text{verifica!})$$

$$= \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} - \left[x \sin x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 + 1 + \frac{\pi}{2} = \pi$$

si devono sommare

Esempio 6

$$\int_{-3}^3 x \arctan(x^2 + 5) dx = 0$$

Fatto generale Se $f(x)$ è dispari (e continua), allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0 \quad \forall A > 0$$

Segue dal fatto che per $f(x)$ dispari vale la relazione

$$\int_0^A f(x) dx = - \int_{-A}^0 f(x) dx$$

Segue dal cambio di variabili $x = -y \leadsto dx = -dy$

$$x = 0 \leadsto y = 0$$

$$x = A \leadsto y = -A$$

$$\int_0^A f(x) dx = \int_0^{-A} f(-y) (-dy) = \int_0^{-A} \underbrace{-f(-y)}_{f(y)} dy$$

$$= \int_0^{-A} f(y) dy = - \int_{-A}^0 f(y) dy$$

Analogo per le funzioni pari:

$$\int_0^A f(x) dx = \int_{-A}^0 f(x) dx$$

Esempio 7

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \underbrace{x}_G \underbrace{\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}}_f dx$$

$$= \left[\underbrace{x}_G \underbrace{(-\arctan(\cos x))}_F \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \underbrace{(-\arctan(\cos x))}_g \underbrace{dx}_F$$

$$= \pi (-\arctan(-1)) + \underbrace{\int_0^{\pi} \arctan(\cos x) dx}_0$$

$$= \frac{\pi^2}{4} \quad \text{"0 per simmetria rispetto a } \frac{\pi}{2}$$

Per formalizzare la simmetria pongo $x = \pi - y \leadsto dx = -dy$

$$x = 0 \leadsto y = \pi$$

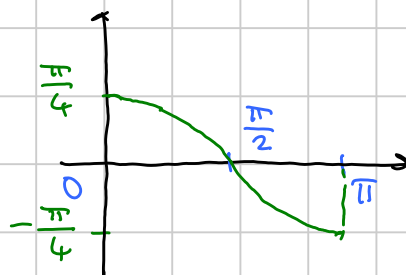
$$x = \pi \leadsto y = 0$$

$$\int_0^{\pi} \arctan(\cos x) dx = \int_{\pi}^0 \underbrace{\arctan(\underbrace{\cos(\pi - y)}_{-\cos y})}_{-\arctan(\cos y)} (-dy)$$

$$= \int_{\pi}^0 \arctan(\cos y) dy$$

$$= - \int_0^{\pi} \arctan(\cos y) dy$$

Confrontando RHS e LHS, l'unica possibilità è che siano 0



Esempio 8

$$\int_{-3}^3 \frac{1}{x} dx$$

Non è un integrale proprio perché l'integranda non è definita nella zona di integrazione.

Esempio 9 Se $f(x)$ è pari e integrabile in $[-A, A]$, posso dedurre che

$$\int_0^A f(x) dx = \int_{-A}^0 f(x) dx \quad ?$$

Devo "suonare la definizione", andando ad un enunciato ancora più generale, del tipo

$$I^+(f, [0, A]) = I^+(f, [-A, 0])$$

$$I^-(f, [0, A]) = I^-(f, [-A, 0])$$

Per dimostrare una qualunque di queste, basta osservare che se $\varphi(x)$ è a scalino e

$$\varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in [0, A]$$

allora

$$\varphi(-x) \geq f(x) \quad \forall x \in [-A, 0]$$

e

$$\int \varphi(-x) dx = \int \varphi(x)$$

perché somme algebriche di aree di rettangoli equivalenti.

Analogamente per le funzioni dispari si ottiene

$$I^+(f, [0, A]) = -I^-(f, [-A, 0])$$

$$I^-(f, [0, A]) = -I^+(f, [-A, 0])$$

(somme di Riemann inferiori / superiori si scambiano).
— 0 — 0 —