

Punto della situazione sulla scomposizione di polinomi

STEP 1 Ogni polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ammette almeno una radice complessa, cioè

$$\forall P(x) \in \mathbb{C}[x] \exists \alpha \in \mathbb{C} \text{ t.c. } P(\alpha) = 0$$

Non Dim. Teorema fondamentale dell'algebra

STEP 2 Ogni polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado n si scrive come prodotto di n fattori di 1° grado, cioè

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

$\uparrow$
coeff. di x^n

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente ripetute

Dim. Teo. Ruffini + induzione sul grado. Se α è una radice di $P(x)$, allora posso dividere

$$P(x) = (x - \alpha) Q(x)$$

$\uparrow$ deg $Q = n-1 \rightsquigarrow$ induzione.

STEP 3 Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora anche $\bar{\alpha}$ è una radice (cioè $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$)

Dim. $P(\alpha) = 0$ Faccio il coniugato e ottengo

$$0 = \overline{P(\alpha)} = P(\bar{\alpha})$$

$\uparrow$
 P è a coeff. reali

STEP 4 Se $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ è una radice, allora α e $\bar{\alpha}$ hanno la stessa molteplicità

Dim.

$m = \text{multiplicità di } \alpha \Rightarrow (x - \alpha)^m \text{ divide } P(x)$
 $\Rightarrow (x - \bar{\alpha})^m \text{ divide } P(x) \text{ (uso qui i coeff. reali)}$
 $\Rightarrow \bar{\alpha} \text{ ha multiplicità } \geq m.$

Scambiando il ruolo di α e $\bar{\alpha}$ ottengo la disug. opposta.

STEP 5

Vale la fattorizzazione reale come enunciata alla lezione precedente.

Dim.

Fattorizzo $P(x)$ sui complessi

$$P(x) = a_n \underbrace{(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)}_{\substack{\text{radici reali, magari} \\ \text{con multiplicità}}} \underbrace{(x - \beta_1)(x - \bar{\beta}_1)}_{\text{}} \underbrace{(x - \beta_2)(x - \bar{\beta}_2)}_{\text{}} \dots$$

Ora $(x - \beta_1)(x - \bar{\beta}_1) = \text{pol. di 2° grado a coeff. reali non ulteriormente scomponibile}$

$$\beta = a + ib$$

$$\underbrace{(x - \beta)}_{\text{}} \underbrace{(x - \bar{\beta})}_{\text{}} = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

Perché funziona la scomposizione in fratti semplici

Si dimostra per induzione sul numero di fattori del denominatore. Il punto fondamentale è un Lemma.

Lemma Se $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, con $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ senza fattori in comune, allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)}{Q_1(x)} + \frac{B(x)}{Q_2(x)}$$

Dim.

Intanto basta farlo quando $P(x) = 1$. Poiché $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono privi di fattori in comune, il loro MCD è 1, quindi per Bézout polinomiale esistono $A(x)$ e $B(x)$ t.c.

$$1 = B(x) Q_1(x) + A(x) Q_2(x).$$

Dividendo per $Q_1(x) Q_2(x)$ ho la tesi.

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

A questo p.to mi ritrovo tutti termini del tipo

$$\frac{A(x)}{(ax+b)^m}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{C_i}{(ax+b)^i}$$

$$\frac{A(x)}{(Ax^2+Bx+C)^n}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{C_i x + D_i}{(Ax^2+Bx+C)^i}$$

$A(x)$ lo posso scrivere come comb. lin. di $1, x, x^2, \dots$, ma
lo posso scrivere anche come comb. lin. di $1, (ax+b), (ax+b)^2, \dots$
quindi

$$A(x) = \sum C_i (ax+b)^i$$

e dividendo lo da ter.

Per i fattori di 2° grado è simile.

Esempio $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2} dx \rightsquigarrow$ se non c'è la x lo so fare
con arctanx
 $\rightsquigarrow$ mi libero della x puntando
al log

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+2} = \frac{3x+3}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{3}{2} \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1)$$

Più in generale

$$\frac{Dx+E}{Ax^2+Bx+C}$$

$$= \boxed{\frac{D}{2A} \frac{2Ax+B}{Ax^2+Bx+C}} + \boxed{\frac{E - \frac{DB}{2A}}{Ax^2+Bx+C}}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\frac{D}{2A} \log(Ax^2+Bx+C) \qquad \arctan$$

Per i termini del tipo $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$, basta scrivere il denominatore

come costante + quadrato

$$Ax^2+Bx+C = A \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} \right)$$

$$= A \left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A} \right)$$

$$= A \left[\left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2} \right]$$

$$= A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}$$

↑
Quadrato

positivo perché $\Delta < 0$

Restano (volendo) i termini del tipo $\frac{Dx+E}{(Ax^2+Bx+C)^m}$

Esempio $\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^3} dx = 3 \int \frac{x}{(x^2+1)^3} dx + 4 \int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$

In generale $\int \frac{x}{(x^2+1)^m} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+1)^m} dx \quad (y=x^2+1)$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1-m} \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^m} dx = \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^m} dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^m} dx$$

esponente $m-1$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^m} dx = \int x \cdot \frac{x}{(x^2+1)^m} dx =$$

G F

$$x \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1-m} \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} - \int 1 \cdot \frac{1}{2(1-m)} \frac{1}{(x^2+1)^{m-1}} dx$$

G F F esponente $m-1$

Se lo so fare con $m-1$, lo so fare con m .

Oss. Con Hermite, questi non servono.