

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Uso la formula con $\Phi(x) = F(G(x))$ (ovviamente supponendo la composizione ben definita)

Allora

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = F'(G(x)) G'(x) = f(G(x)) g(x)$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_a^b f(G(x)) g(x) dx &= F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= [F(x)]_{G(a)}^{G(b)} \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

Oguagliando primo e ultimo si ottiene

$$\int_a^b f(G(x)) g(x) dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx$$

Formula di
INTEGRAZIONE
PER SOSTITUZIONE

Brutalmente: voglio calcolare il LHS, cioè l'integrale di $f(G(x)) g(x)$. Pongo $y = G(x)$. Formalmente

$$\frac{dy}{dx} = \text{derivata di } y \text{ rispetto a } x = G'(x) = g(x)$$

Moltiplico per dx e ottengo $dy = g(x) dx$.

Ora osservo che per $x = a$ si ha $y = G(a)$
 $x = b$ " " $y = G(b)$

Riassumendo:

$$\int_a^b \underbrace{f(G(x))}_{f(y)} \underbrace{g(x) dx}_{dy} = \int_{G(a)}^{G(b)} f(y) dy$$

Esempio 1 $\int x^6 \sin(x^7) dx$

Pongo $y = x^7$. Allora

$$\frac{dy}{dx} = 7x^6, \text{ cioè } dy = 7x^6 dx$$

$$= \frac{1}{7} \int \underbrace{\sin(x^7)}_{\sin y} \cdot \underbrace{7x^6 dx}_{dy} = \frac{1}{7} \int \sin y dy = -\frac{1}{7} \cos y$$

ritorno in $x \rightarrow = -\frac{1}{7} \cos(x^7)$

In casi di dubbi sul procedimento basta derivare

$$\left[-\frac{1}{7} \cos(x^7) \right]' = -\frac{1}{7} (-\sin(x^7)) \cdot 7x^6 = x^6 \sin(x^7) \quad \text{ok.}$$

Esempio 2 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

Pongo $y = \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$dy = -\sin x dx$$

$$= -\int \frac{1}{\cos x} \underbrace{(-\sin x dx)}_{dy}$$

$$= -\int \frac{1}{y} dy = -\log|y| = -\log|\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$$

Per ogni $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) si ha che $\log \frac{1}{|\cos x|}$ ha come derivata $\tan x$.

Esempio 3 $\int \frac{\log^4 x}{x} dx$

Pongo $y = \log x$, quindi $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int \underbrace{\log^4 x}_{y^4} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y^4 dy = \frac{1}{5} y^5 = \frac{1}{5} \log^5 x$$

Esempio 4 $\int \frac{1}{x \log^4 x} dx = \text{come prima}$

$$\int \frac{1}{y^4} dy = -\frac{1}{3} \frac{1}{y^3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\log^3 x}$$

Esempio 3 $\int \frac{1}{x \log x} dx = \dots = \int \frac{1}{y} dy = \log |y| = \log |\log x|$

Esempio 6 $\int \log^2 x dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\log^2 x} dx =$

$$= \underset{f}{x} \log^2 x - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{2 \log x} \cdot \frac{1}{x} dx = x \log^2 x - 2 \int \log x dx$$

$$= x \log^2 x - 2x \log x + 2x$$

Si poteva fare per sostituzione? $y = \log x \quad dy = \frac{1}{x} dx$

$$\int \log^2 x dx = \int \underbrace{x}_{e^y} \underbrace{\log^2 x}_{y^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{dy} = \int y^2 e^y dy = \text{si fa per parti e poi si sostituisce } y = \log x$$

Esempio 7 $\int \sqrt{1-x^2} dx$ Provo la sostituzione $x = \sin y$
 $\frac{dx}{dy} = \cos y \quad dx = \cos y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = \int \cos^2 y dy = \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \cos y \cdot \sin y$$

$$= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \cdot \cos(\arcsin x)$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\sin^2 \alpha}$$

Conclusione: $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}$.

Salvo la faccia: per ogni $x \in [-1, 1]$ derivo e verifico.

Potenza di $\sin x$ e $\cos x$ Come calcolare $\int \sin^k x dx$ $\int \cos^k x dx$

1° modo Cercare formule precorsistiche per ridurre a somme di funzioni trigonometriche senza esponenti (per $k=2$ è la strada migliore)

2° modo Induzione + grande ritorno

$$\int \cos^k x dx = \int \underset{F}{\cos x} \cdot \underset{G}{\cos^{k-1} x} dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x - \int \sin x \cdot (k-1) \cos^{k-2} x \cdot (-\sin x) dx$$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int \cos^{k-2} x \cdot \sin^2 x dx$$

$\downarrow$
 $1 - \cos^2 x$

$$= \sin x \cdot \cos^{k-1} x + (k-1) \int \cos^{k-2} x dx - \underbrace{(k-1) \int \cos^k x dx}_{\text{GRANDE RITORNO}}$$

Portando al LHS si esprime $\int \cos^k x dx$ in termini di

$\int \cos^{k-2} x dx$ e roba da non integrare più.

3° modo Solo per i k dispari si può integrare per sostituzione.

$$\int \cos^7 x dx = \int \cos x \cdot \cos^6 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)^3 dx$$

Pongo $y = \sin x$, quindi $\frac{dy}{dx} = \cos x$, cioè $dy = \cos x dx$

$$= \int (1 - y^2)^3 dy = \int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) dy$$

$$= y - y^3 + \frac{3}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 = \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x$$

Esempio

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx$$

FACILE

$$\int \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

BANALE

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \log(1+x^4)$$

$y = 1+x^4$ oppure anche $y = x^4$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$$

(Si poteva fare con il cambio di variabili $y = x^2$)

— o — o —