

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Come determinare una primitiva di una funzione data.

- ① Primitive elementari (tabellina di derivate al contrario)
- ② Integrazione per parti
- ③ Integrazione per sostituzione
- ④ Integrazione funzioni razionali
- ⑤ Sostituzioni razionalizzanti

Notazione $\int f(x) dx =$ integrale indefinito (senza estremi)
 = insieme di tutte le primitive della
 funzione $f(x)$ (richiede condizioni su $f(x)$)

Più abusivamente, usiamo la notazione dell'integrale indefinito per indicare una qualunque primitiva di $f(x)$.
 — o — o —

Enunciato del teo. fondamentale Sia $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\Phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $\varphi(x)$. Allora

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(a) - \Phi(b)$$

— o — o —

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$. Siano $F(x)$ e $G(x)$ due primitive (cioè $G'(x) = g(x)$ e $F'(x) = f(x)$).

Pongo

$$\Phi(x) = F(x) \cdot G(x)$$

Allora

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \Phi'(x) = F'(x) G(x) + F(x) G'(x) \\ &= f(x) G(x) + F(x) g(x) \end{aligned}$$

Sostituendo nella formula fondamentale:

$$\int_a^b [f(x)G(x) + F(x)g(x)] dx = [F(x) \cdot G(x)]_a^b$$

Riorganizzando i termini

$$\int_a^b f(x)G(x) dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g(x) dx$$

Formula INTEGRAZ. PER PARTI

Formula abusiva: $\int fG = FG - \int Fg$ Stessa cosa in breve senza estremi

Esempio 1

$$\begin{aligned} \int x e^{2x} dx &= x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(3x) dx &= x^2 \cdot \frac{1}{3} (-\cos(3x)) - \int 2x \cdot \frac{1}{3} (-\cos(3x)) dx \\ &= -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{3} \int x \cos(3x) dx \end{aligned}$$

Con un altro passaggio per parti

$$\begin{aligned} \int x \cos(3x) dx &= x \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) - \int 1 \cdot \frac{1}{3} \sin(3x) dx \\ &= \frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x). \quad \text{Quindi} \end{aligned}$$

$$\int x^2 \sin(3x) dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x).$$

Oss. Ottenuta una primitiva, è consigliabile fare la verifica derivando (tra l'altro così si ottiene una dimostrazione alternativa che si tratta di una primitiva).

Oss. Con questa tecnica si calcola la primitiva di tutte le funzioni del tipo

$$p(x) e^{dx} \quad p(x) \cos(dx) \quad p(x) \sin(dx)$$

con $p(x)$ polinomio.

Oss. Tutti i prodotti di due o più funzioni trigonometriche si possono trasformare in somme mediante le formule trigonometriche $\text{PRODUCT} \rightarrow \text{SUM}$.

Esempio 3 $\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\cos x} \, dx =$

$$= \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)} \underset{F}{\sin x} \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{precorso}}}{\sin^2 x} \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\substack{\text{grande ritorno} \\ \text{con coeff. } \neq 1}}$$

Portandolo al LHS:

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x \quad \text{divido per 2 e ho finito.}$$

Alternativa precorsistica: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \frac{\cos(2x) + 1}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) \end{aligned}$$

Esempio 4 $\int e^{2x} \cdot \cos x \, dx = e^{2x} \cdot \sin x - \int 2e^{2x} \cdot \sin x \, dx$

G F G F g F

$$= e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx$$

G F
F G $\leadsto$ provare a vedere

$$= e^{2x} \sin x - 2 \left[e^{2x} (-\cos x) - \int 2e^{2x} (-\cos x) \, dx \right]$$

G F g F

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{GRANDE RITORNO!}} \leadsto$ va al LHS

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{1}{5} e^{2x} \sin x + \frac{2}{5} e^{2x} \cos x \quad \leadsto \text{VERIFICA !!}$$

— 0 — 0 —

Oss. Con il grande ritorno si fanno le primitive del tipo

$\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) \, dx \qquad \int e^{\alpha x} \sin(\beta x) \, dx$

ma anche $\int e^{\alpha x} \cos(\beta x) \sin(\gamma x) \cos(\delta x) \, dx$

— 0 — 0 —

Esempio 5 $\int \log x \, dx = \int 1 \cdot \log x \, dx$

F G

$$= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - \int 1 \cdot dx = x \log x - x.$$

F G F g

Esempio 6 $\int \arctan x \, dx = \int 1 \cdot \arctan x \, dx$

F G

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

F G F g

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

Oss. La tecnica dell'1 nascosto funziona bene per primitive contenenti $\log x$ e $\arctan x$.

Esempio 7 $\int \tan x \, dx = \int \underbrace{\sin x}_f \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_g \, dx$

$$= \underbrace{-\cos x}_F \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_G - \int \underbrace{(-\cancel{\cos x})}_F \underbrace{\left(-\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}\right)}_g (-\sin x) \, dx$$

$$= -1 + \int \tan x \, dx$$

Semplificando: $0 = -1.$
— 0 — 0 —