

Teoremi sulle funzioni integrabili

① Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili in $[a, b]$.

Allora $f(x) + g(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Dim. Uso il criterio di integrabilità con $\frac{\varepsilon}{2}$ per $f(x)$ e $g(x)$.
Allora esistono step functions

$$\varphi_1^f(x) \leq f(x) \leq \varphi_2^f(x)$$

$$\varphi_1^g(x) \leq g(x) \leq \varphi_2^g(x)$$

tali che

$$\int_a^b \varphi_2^f(x) dx - \int_a^b \varphi_1^f(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b \varphi_2^g(x) dx - \int_a^b \varphi_1^g(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Wlog posso assumere che tutte siano definite a partire dalla stessa suddivisione. Allora si verifica che

$$\underbrace{\varphi_1^f(x) + \varphi_1^g(x)}_{\varphi_1(x)} \leq f(x) + g(x) \leq \underbrace{\varphi_2^f(x) + \varphi_2^g(x)}_{\varphi_2(x)} \quad \forall x \in [a, b]$$

e inoltre

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\int_a^b \varphi_2^f(x) dx + \int_a^b \varphi_2^g(x) dx - \int_a^b \varphi_1^f(x) dx - \int_a^b \varphi_1^g(x) dx$$

Ho usato che l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali per le step functions (andrebbe dimostrato).

② Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Allora $\lambda f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

Dim. Praticamente come sopra (occhio che se $\lambda < 0$ si scambiano le disuguaglianze).

① + ② in versione colta L'insieme delle funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ è uno spazio vettoriale e

$$f \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

è una appl. lin. da questo sp. vett. in $\mathbb{R}$.

Achtung! $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$

↑
in generale

(domanda: se vale l' =, cosa posso dire di $f(x)$ e $g(x)$?)

③ Monotonia dell'integrale Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili e

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Dim Per esempio le somme superiori per $g(x)$ sono anche somme superiori per $f(x)$

Domanda: cosa resta vero di ①, ②, ③ se non si assume che le funzioni siano integrabili?

④ Integrali e valori assoluti Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$.

Allora $|f(x)|$ è integrabile in $[a, b]$ e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

valore assoluto dell'int.
è $\leq$ dell'int. del
valore assoluto

Oss. Se so che $|f(x)|$ è integrabile, posso dedurre che $f(x)$ è integrabile? NO!

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

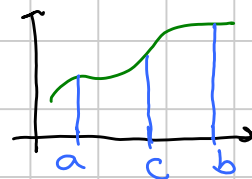
Oss. Il ④ è analogo alla proprietà $|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|$
— o — o —

⑤ Additività rispetto alla zona di integrazione

Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$ e sia $c \in (a, b)$.

Allora $f(x)$ è integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$ e

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$



Vale anche il viceversa: se $f(x)$ è int. in $[a, c]$ e $[c, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$ e vale la formula

"Dici": si tratta di lavorare con le step functions aggiungendo sempre il pto c.

Alternativa: usare la definizione di integrale su tutto per funzioni nulle fuori da un intervallo, poi introdurre

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (a, c) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (c, b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e usare il teo. della somma,
— o — o —

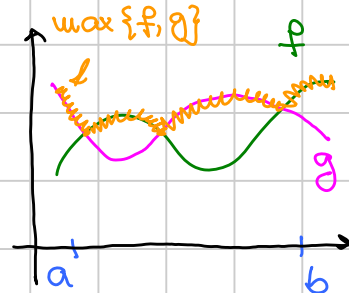
Oss. In realtà andrebbe dimostrato che l'integrale definito nel caso generale coincide per le step functions con quello definito nel caso semibianale.

⑥ Retico delle funzioni integrabili

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili in $[a, b]$, allora anche

$$\max\{f(x), g(x)\} \text{ e } \min\{f(x), g(x)\}$$

sono integrabili in $[a, b]$.



Dim. Formula generale a livello di numeri

$$\max\{A, B\} = \frac{A+B+|A-B|}{2}$$

se $A \geq B$

$$\frac{A+B+A-B}{2} = A$$

se $A \leq B$

$$\frac{A+B+B-A}{2} = B$$

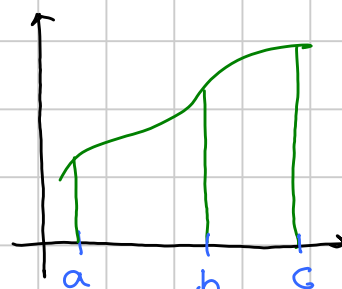
$$\min\{A, B\} = \frac{A+B-|A-B|}{2}$$

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili, allora $f(x) - g(x)$ è integrabile, ma allora $|f(x) - g(x)|$ è integrabile e quindi anche $\max$ e $\min$ sono somma / diff. di funzioni integrabili.

Oss. La proprietà ⑤ vale anche se $c \notin (a, b)$ per di interpretare gli integrali

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

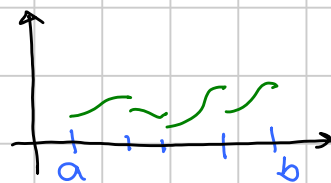
$$- \int_b^c f(x) dx$$



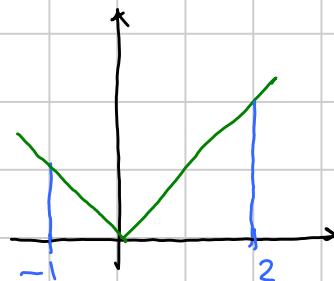
Ovviamente devo assumere come ipotesi che $f(x)$ sia integrabile su tutto $[a, c]$.

Teorema misterioso Le seguenti classi di funzioni sono integrabili

- le funzioni continue
- le funzioni monotone
- le funzioni continue a tratti



Esempio 1 $\int_{-1}^2 |x| dx$ lo vedo come area
 $= \frac{5}{2}$ (somma aree triangoli)



Esempio 2 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$
 $y = \sqrt{1-x^2}$
metà dell'area del cerchio

