

INTEGRALI (di RIEMANN) (integrali propri)

- notazioni
- significato geometrico
- definizione
- Tecniche di calcolo

① Notazioni

$$\int_a^b f(x) dx$$

(il simbolo $\int$ è l'**integranda**)
 (il simbolo dx è l'**oggetto misterioso**)
 (il simbolo $\int$ è la **somma modificata**)
 (il simbolo dx è la **S modificata**)

Ingredienti fond.:

- zona di integrazione: intervallo $[a, b]$, quindi limitata
- funzione integranda: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata
 $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$.

Def. estesa

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(stesso estremo)

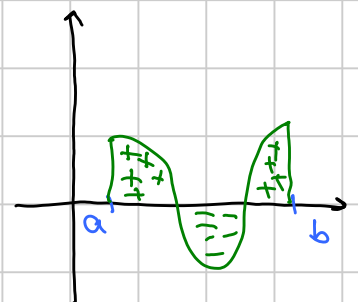
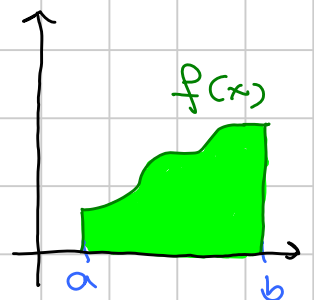
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

(estremi rovesciati)

② Significato geometrico

$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } \boxed{\text{CON SEGNO}}$$

della parte di piano
compresa tra asse x e
grafico di $f(x)$.



Le zone sopra l'asse x contano con il
segno $+$, le zone sotto contano con
il segno $-$.

Integrale $= 0 \Leftrightarrow$ area sopra = area sotto.

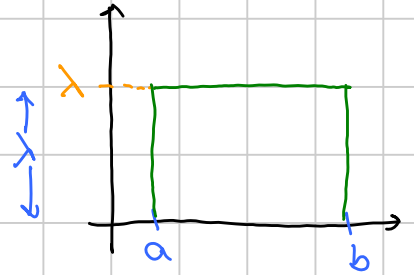
- ③ Definizione 3 tappe $\rightarrow$ caso banale
 $\rightarrow$ caso semibanal
 $\rightarrow$ caso generale

Caso banale : $f(x) = \lambda$ (costante) per ogni $x \in [a, b]$

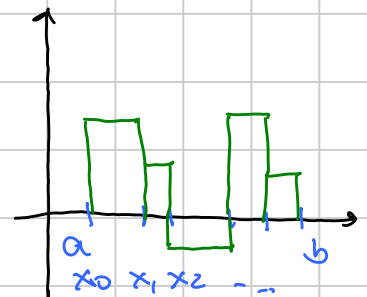
In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda (b-a)$$

= area con segno del rettangolo.



Caso semibanal : $f(x)$ è costante a tratti, cioè esiste un intero $n \geq 1$ ed esistono numeri reali



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

partizione di $[a, b]$
 ci pezzi possono avere lunghezze diverse)

ed esistono numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tali che

$$f(x) = \lambda_i \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i)$$

(negli estremi si può decidere a piacere o anche astenersi)

In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma con segno delle aree dei rettangoli}$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

$\uparrow$ altezza rettangolo i -esimo,
 $\downarrow$ base rettangolo i -esimo

Le funzioni del caso semibanal si chiamano

$\rightarrow$ FUNZIONI SEMPLICI

$\rightarrow$ FUNZIONI A GRADINO (STEP FUNCTIONS)

Oss. 1 Le step functions sono combinazioni lineari di funzioni caratteristiche di intervalli (cioè quelle che valgono 1 sull'intervallo e 0 altrove)

Oss. 2 Non è evidente che due combinazioni lineari diverse che producono la stessa funzione abbiano lo stesso integrale applicando la formula del rettangolo.

Oss. 3 Non è nemmeno evidente che, date due step functions $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ con

$$\varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

allora per forza

$$\int_a^b \varphi_1(x) dx \geq \int_a^b \varphi_2(x) dx$$

Caso generale $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata qualunque.

In questo caso si definiscono l'integrale superiore

$$I^+(f, [a, b]) =$$

$$= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$



Analogamente l'integrale inferiore è

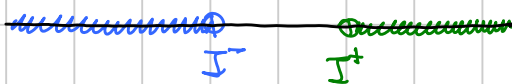
$$I^-(f, [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi \text{ è una step function e } \varphi(x) \leq f(x) \forall x \in [a, b] \right\}$$

Oss. 4 La limitatezza di $f(x)$ garantisce l'esistenza di step functions sopra e sotto, quindi faccio inf/sup di insieme non vuoti.

Teorema Per ogni funzione $f(x)$ limitata si ha la relazione

$$I^-(f, [a, b]) \leq I^+(f, [a, b])$$

L'idea è che ogni somma di Riemann inferiore (quelle che ci sono nella def. di I^-) è $\leq$ di ogni somma di Riemann superiore. Questo segue dall'oss. 3 precedente

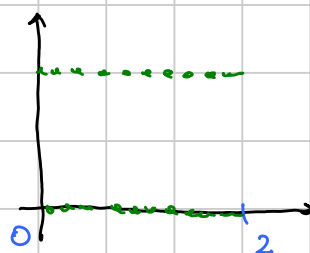


Esempio (funzione di DIRICHLET) $[a, b] = [0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ogni step function $\varphi(x) \geq f(x)$ è
in realtà ≥ 1 , quindi $I^+(f, [0, 2]) = 2$

Ogni step function $\varphi(x) \leq f(x)$ è
in realtà ≤ 0 , quindi $I^-(f, [0, 2]) = 0$.



Def. Una funzione limitata si dice integrabile secondo RIEHANN in $[a, b]$ se

$$I^-(f, [a, b]) = I^+(f, [a, b])$$

In tal caso il valore comune di I^+ e I^- si dice integrale di f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx,$$

Approccio alternativo Si definisce l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ per funzioni $f(x)$ che sono limitate e nulle al di fuori di un certo intervallo $[a, b]$. Si procede allo stesso modo imponendo che anche le step functions nella def. di I^+ e I^- siano nulle fuori da un intervallo (non necessariamente comune).

Criterio di integrabilità Una funzione $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono due step functions $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$, definite a partire dalla stessa suddivisione di $[a,b]$ tali che

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \leq \varepsilon$$

Area gialla in figura

Dim OVVIA !

— o — o —

