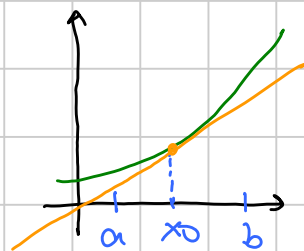


Esempio 1 Sia $f \in C^2((a,b))$ una funzione convessa, sia $x_0 \in (a,b)$. Allora $f(x)$ sta sopra la retta tangente in x_0 .

Dim. Taylor - Lagrange con $n=1$ e centro in x_0

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{\overset{\geq 0}{f''(c)}}{2} \underset{\geq 0}{R^2}$$

$$\geq f(x_0) + f'(x_0)R$$



Volendo si può porre $x_0 + R$ e ottenere

$$f(x) \geq \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{eq. retta tangente al grafico in } x_0}$$

Oss. La conclusione vale per f convessa anche se non è C^2 , ma la dimostrazione è diversa.

Esempio 2 Taylor - Lagrange di $f(x) = e^x$ di ordine n :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\overset{c_n}{e}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Domanda: fissato $x \in \mathbb{R}$, calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n$.

Prima osservazione: c_n è unico perché e^x è iniettiva (vale tutte le volte che la derivata $(n+1)$ -esima è iniettiva).

Seconda osservazione: volendo c_n si ricava, ma il numero di termini cresce di volta in volta.

Scrivo anche il Taylor-logr. di ordine $(n+1)$

$$\boxed{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}} + e^{c_n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \boxed{1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!}} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{e^{c_{n+1}} x^{n+2}}{(n+2)!}$$

Semplificando x^{n+1} e $(n+1)!$ ottengo

$$1 \leq e^{c_n} = 1 + \frac{e^{c_{n+1}} x}{n+2} \leq 1 + \frac{e^x x}{n+2}$$

$\uparrow$ $c_n \geq 0$ $\uparrow$ $c_{n+1} \leq x$

Facciamo per semplicità il caso $x \geq 0$, otteniamo

$$\underbrace{1}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{e^{c_n}}_{\downarrow 1} \leq \underbrace{1 + \frac{e^x \cdot x}{n+2}}_{\downarrow 1}$$

Per i carabinieri $e^{c_n} \rightarrow 1$, quindi $c_n \rightarrow 0$ ($c_n = \log(e^{c_n})$)

Se $x \leq 0$, tutte le disug. nei carabinieri sono "girate".

Esempio 3 Sviluppare $\tan x$ in $x=0$ di ordine 5.

1° modo: 5 derivate ...

2° modo: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \right)^{-1}$$

$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 \dots$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} \right) + o(x^5)$$

e si sviluppa (se fosse $(5+t)^{-1} = 5^{-1} (1 + \frac{t}{5})^{-1} \dots$)

3° modo lo sviluppo sarà $\tan x = x + a x^3 + b x^5 + o(x^6)$

Ora scelgo se usare $\tan(\arctan x) = x$ o viceversa

$$\begin{aligned}\tan(\arctan x) &= \arctan x + a \arctan^3 x + b \arctan^5 x + o(x^6) \\&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + a \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^3 + b x^5 + o(x^6) \\&= \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \underbrace{a x^3 - a x^5} + b x^5 + o(x^5) \\&= \cancel{x}\end{aligned}$$

Quindi per forza $a = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5} - a + b = 0$, $b = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$.

Oss. Allo stesso modo posso fare $\arcsin x$

Alternativa per $\arcsin x$: sviluppare la derivata $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

e fare la primitiva termine a termine come con $\arctan x$

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

e poi faccio "la primitiva termine a termine"

Formalmente: sviluppo $\frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow$ ottengo info sulle derivate in

$x=0$ di $\frac{1}{1+x^2} \rightsquigarrow$ ottengo info. sulle derivate di $\arctan x$ in

$x=0 \rightsquigarrow$ ottengo lo sviluppo di $\arctan x$,

La stessa ROAD MAP funziona per $\arcsin x$ e $\arccos x$.

Esempio 4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\cosh x) - \cos(\sqrt{1+x^2})}{\cosh(\cos x) - \cosh(\sqrt{1+x^2})}$$

Con Taylor costruiamo lo sviluppo di $\cos x$ e $\cosh x$ in $x_0 = 1$

1° modo: sviluppi

2° modo: L'Hôpital

3° modo: Lagrange

$$\text{Num} = -\sin(c_x) (\cosh x - \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{Den} = \sinh(d_x) (\cos x - \sqrt{1+x^2})$$

Quindi

$$\text{Frazione} = \frac{-\sin(c_x)}{\sinh(d_x)}$$

$$\frac{\cosh x - \sqrt{1+x^2}}{\cos x - \sqrt{1+x^2}}$$

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \hline \cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \hline \frac{o(x^2)}{-x^2 + o(x^2)} \rightarrow 0 \end{array}$$

Dove stanno c_x e d_x ?

c_x sta tra $\cosh x$ e $\sqrt{1+x^2}$

d_x sta tra $\cos x$ e $\sqrt{1+x^2}$

Per i carabinieri $c_x \rightarrow 1$
 $d_x \rightarrow 1$

$$\text{quindi} \quad -\frac{\sin(c_x)}{\sinh(d_x)} \rightarrow -\frac{\sin 1}{\sinh 1}$$

Esempio 5

$$\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1} - 3\sqrt{n} \right]^{1/\log n}$$

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1} - 3\sqrt{n} = \sqrt{n} \sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{4n} \sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 3\sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n} \left\{ \sqrt{1+\frac{1}{n}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 3 \right\} = \sqrt{n} \left\{ \cancel{1} + \frac{1}{2n} + 2\cancel{1} + \frac{1}{4n} - \cancel{3} \right\}$$

$$= \sqrt{n} \frac{3}{4n} = \frac{3}{4\sqrt{n}}. \quad \text{È come se fosse} \quad \left[\frac{3}{4\sqrt{n}} \right]^{1/\log n} =$$

$$\left(\frac{3}{4\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\log n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{\log n}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{\log n}}}_{e^{\frac{1}{\log n} - \log \frac{1}{\sqrt{n}}}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$e^{\frac{1}{\log n} - \log \frac{1}{\sqrt{n}}} = e^{\frac{1}{\log n} (-\frac{1}{2} \log n)}$$

— o — o —