

Esercizio 1 Dimostrare che esiste una costante  $c > 0$  tale che

$$\cos^{22} x + \sin^{2014} x \geq c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. Pongo  $f(x) = \cos^{22} x + \sin^{2014} x$ . Si tratta di una funzione periodica ( $2\pi$  è un periodo).

Continua + periodica  $\Rightarrow$  esiste

$$\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = \min \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} = c$$

Resta da verificare che  $c > 0$ .

Ora  $c = f(x_0)$  per un qualche  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Inoltre

$$f(x_0) > 0$$

perché se fosse  $f(x_0) = 0$  vorrebbe dire che  $\sin x_0 = \cos x_0 = 0$  il che non è possibile.

Dim. sbagliata  $f(x) > 0$  sempre (perché  $\sin x$  e  $\cos x$  non si annullano contemporaneamente) quindi  $c > 0$ .

Oss.  $f(x) = \frac{1}{x} > 0$  per ogni  $x > 0$ , ma non è vero che

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } \frac{1}{x} \geq c \quad \forall x > 0.$$

È fondamentale l'esistenza del minimo.

Esercizio 2 Dim. che esiste  $c > 0$  t.c.

$$\frac{1}{\sin x + 2 \cos x} \leq c \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Dim. Pseudo  $f(x) = \sin x + 2\cos x$ .  
 $\geq 0$   $\geq 0$   
 nell'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$

Poiché  $\sin x$  e  $\cos x$  sono  $\geq 0$  e non si annullano contemporaneamente, per forza  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .  
 Inoltre

$$f(x) \geq \min \{ f(x) : x \in [0, \frac{\pi}{2}] \} = m > 0$$

perché  $m = f(x_0) > 0$

quindi

$$\frac{1}{f(x)} \leq \boxed{\frac{1}{m}} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

— 0 — 0 —

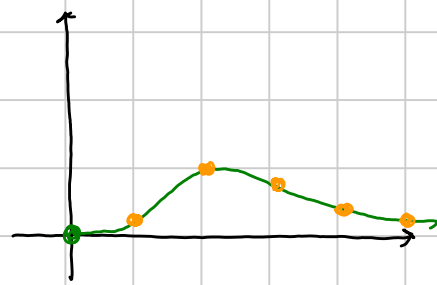
Esercizio 3 Calcolare inf / sup / max / min dell'insieme

$$\left\{ \underbrace{\frac{n^3}{2^n}}_{a_n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{8}{4}, \frac{27}{8}, \dots \right\}$$

Possibile approccio: studio la funzione  $f(x) = x^3 2^{-x}$  per  $x \geq 0$

Parte facile:  $\inf = 0$  e  $\min$  non esiste

$a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$  sempre. Questo basta per concludere che  $\inf = 0$  e  $\min$  N.E.



Quasi gratis: esiste il max. Infatti

$$\{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ e } a_n \geq \frac{1}{2} \}$$

è un insieme finito perché poiché  $a_n \rightarrow 0$  sarà  $a_n < \frac{1}{2}$  definitivamente. Quindi per il max se la guardo un numero finito di termini,

Formale: uso la def. di limite con  $\varepsilon = \frac{1}{25}$ . Allora

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \text{ si ha } a_n \leq \frac{1}{25}$$

Prendo  $M = \max \{a_n : 1 \leq n \leq n_0\}$  (esiste perché è un insieme finito) e dico che  $M = \max \{a_n : n \geq 1\}$ .

Questo è vero perché

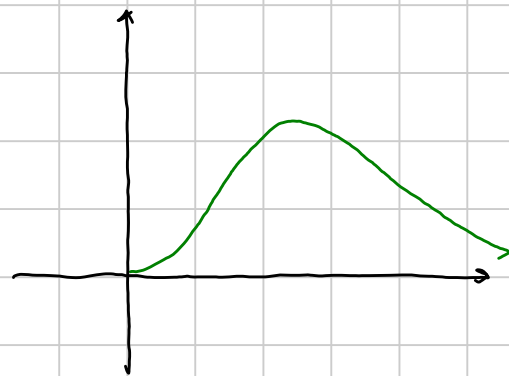
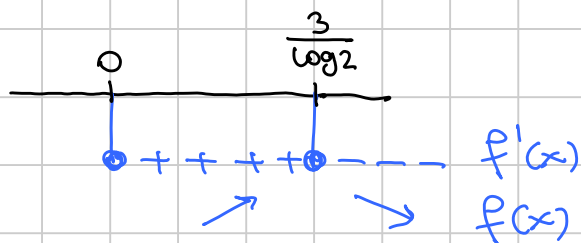
- se  $n \leq n_0$ , allora  $a_n \leq M$  per def. di  $M$
- se  $n \geq n_0$ , allora

$$a_n \leq \frac{1}{25} \leq \frac{1}{2} = a_1 \leq M$$

$\uparrow$  def. di  $n_0$                        $\uparrow$   $a_1$  gioca nella def. di  $M$

$$f'(x) = 3x^2 2^{-x} - x^3 2^{-x} \log 2 = x^2 2^{-x} (3 - x \log 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ per } x = 0 \text{ e per } x = \frac{3}{\log 2}$$



Anche la successione prima cresce e poi decresce definitivamente. Il max è il valore che si ha quando inizia la decrescita

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{8}{4} \quad a_3 = \frac{27}{8} \quad \boxed{a_4 = \frac{64}{16}} \quad a_5 = \frac{125}{32} < a_4$$

$\uparrow$   
Max

Achtung! Non è vero che il p.to di max su  $\mathbb{N}$  è l'intero positivo più vicino al p.to di max su  $x \geq 0$ . Se la giocano sempre l'intero prima e dopo.

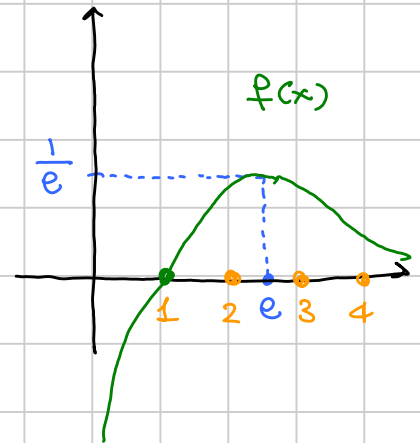
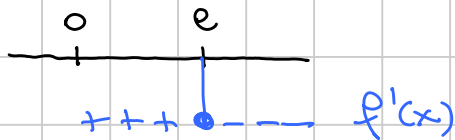


Esercizio 4  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \dots$  chi è più grande?

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n} \quad \text{quindi studio}$$

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \quad \text{per } x \geq 1$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$



Per il max se la guardo  $n=2$  e  $n=3$  :  $\sqrt{2} \stackrel{?}{<} \sqrt[3]{3}$  elevo alla 6ª  
 $8 < 9$  ok.

Quindi il max è  $\sqrt[3]{3}$ . Ora sappiamo anche che la successione  
 $a_n = \sqrt[n]{n}$  è strett. dec. per  $n \geq 3$   
 $\quad \quad \quad - \quad - \quad -$

Esercizio 5 Dimostrare che l'equazione

$$\log(3+x^{20}) + x \sin(x^2) = 2014$$

ha infinite soluzioni reali (sarebbe lo stesso con ogni  $\lambda$  invece di 2014)

[se fosse  $\log(3+x^{20}) + x = 2014$  sarei sicuro che c'è un'unica soluzione  $x > 0$  (per le soluzioni  $x < 0$  bisognerebbe fare un conto): quando il lim a  $+\infty$  e la monotonia].

Fatto generale. Se  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  è continua ed esistono due successioni  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \rightarrow +\infty$  t.c.

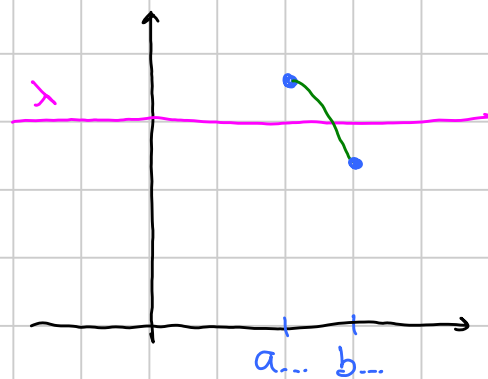
$$f(a_n) \rightarrow +\infty \quad \text{e} \quad f(b_n) \rightarrow -\infty,$$

allora per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'equazione  $f(x) = \lambda$  ha infinite soluzioni.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(a_{n_1}) > \lambda$$

$$\exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(b_{k_1}) < \lambda, k_1 > n_1$$

Allora esiste  $x$  compreso tra  $a_{n_1}$  e  $b_{k_1}$   
tale che  $f(x) = \lambda$ .



$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n_2 > k_1 \text{ e } f(a_{n_2}) > \lambda$$

$$\exists k_2 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } k_2 > n_2 \text{ e } f(b_{k_2}) < \lambda$$

Allora esiste  $x$  in  $[a_{n_2}, b_{k_2}]$  t.c.  $f(x) = \lambda$

e così via.

