

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Si dice che f è lipschitziana in A se esiste una costante L tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A$$

Oss. Se una certa L va bene, allora tutte le $L' \geq L$ vanno bene ugualmente.

La più piccola L che posso mettere si dice costante di Lip. di f in A ed è data dalla formula

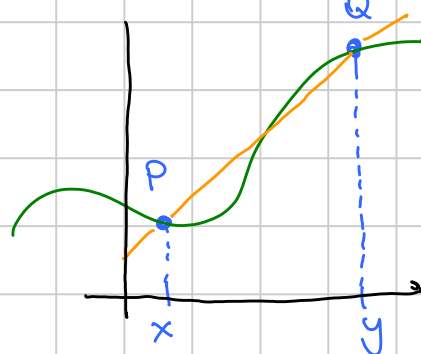
$$L = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x \in A, y \in A, x \neq y \right\}$$

Interpretazione geom. Per $x \neq y$ divido e ottengo

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L$$

coeff. ang. retta PQ

$$\forall x \in A \quad \forall y \in A \quad x \neq y$$



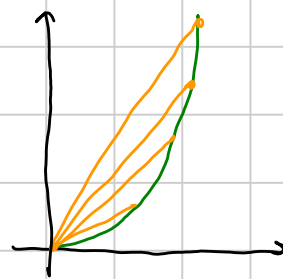
Quindi: f è lip. in A se e solo se le rette che congiungono 2 p.ti qualunque del grafico hanno pendenza limitata.

È come dire che il grafico ha pendenza limitata.

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è Lip. su $\mathbb{R}$? NO

Pongo $x=0$ e $y=n$ nella definizione

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$$



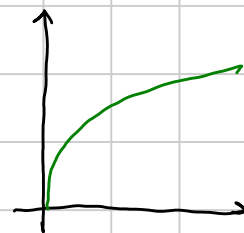
$$n^2 \leq L n \quad \text{quindi} \quad n \leq L \quad \text{che è impossibile } \forall n \in \mathbb{N}$$

In alternativa potrei usare $x=n$, $y=n+1$

Esempio 2 $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-30, 30]$? SI

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = \underbrace{|x+y|}_{\leq 60 \text{ nell'intervallo dato}} |x-y| \leq 60 |x-y|$$

Esempio 3 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[0, 1]$? NO



Sostituisco $x=0$ e $y=\frac{1}{n}$ nella def.:

$$\left| \sqrt{\frac{1}{n}} - \sqrt{0} \right| \leq L \left| \frac{1}{n} - 0 \right|, \text{ cioè } \frac{1}{\sqrt{n}} \leq L \cdot \frac{1}{n}, \text{ cioè}$$

$$\sqrt{n} \leq L \text{ che è impossibile quando } n \rightarrow +\infty.$$

Esempio 4 $f(x) = \sqrt{x}$ è Lip. in $[1, +\infty)$? SI

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \stackrel{?}{\leq} L|x-y|, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \stackrel{?}{\leq} L|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

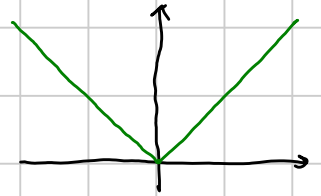
è equivalente a $1 \leq L|\sqrt{x} + \sqrt{y}|$ e questa è vera anche con $L = \frac{1}{2}$ in quanto

$$1 \leq \frac{1}{2} \cdot 2 \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x} + \sqrt{y}|$$

$\uparrow$
 $x \geq 1$
 $y \geq 1$

Oss. Le funzioni Lip. non è detto che siano derivabili.

Ad esempio, $f(x) = |x|$ è lip. ma non derivabile in $x=0$



$$||x| - |y|| \leq \underset{L=1}{|x-y|}$$

Dim. Partiamo dalla disuguaglianza triangolare

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$$

(si dimostra distinguendo un po' di casi). Pongo $a=y$, $b=x-y$
Ottengo

$$|x| \leq |y| + |x-y|$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x-y| \quad (\text{utile se } |x| \geq |y|)$$

Ponendo $a=x$ e $b=y-x$ ottengo

$$|y| \leq |x| + |y-x|$$

da cui

$$|y| - |x| \leq |x-y| \quad (\text{utile se } |x| \leq |y|)$$

— o — o —

Teorema Supponiamo che A sia un intervallo, una semiretta, oppure tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo che $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sia derivabile. Allora

$$f \text{ è lip. in } A \Leftrightarrow |f'(x)| \text{ è limitata in } A$$

e in tal caso
$$L = \sup \{ |f'(x)| : x \in A \}$$

Dim. Ipotesi: f derivabile e Lip.

Tesi: derivata limitata dalla costante di Lip.

$$|f'(x_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq L$$

↑ sappiamo già che $f'(x_0)$ esiste

poiché

$$\frac{|f(x_0+h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \frac{L|h|}{|h|}$$

Seconda implicazione Ipotesi: $L = \sup\{|f'(x)| : x \in A\} < +\infty$

Tesi: f è Lip. in A

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \quad \text{Lagrange}$$

↑
sta tra x e y

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y-x| \leq L |y-x|$$

Oss.: per poter applicare Lagrange serve che f sia definita in tutto l'intervallo tra x e y , quindi A insieme A deve essere convesso

Resta da verificare che L è la più piccola costante che va bene.

Se esistesse una costante $L_1 < L$ tale che

$$|f(y) - f(x)| \leq L_1 |y-x| \quad \forall x \in A \quad \forall y \in A,$$

allora per l'implicazione precedente potrei concludere che

$$\sup\{|f'(x)| : x \in A\} \leq L_1 < L$$

Il che contraddice la def. di L .

Esempio 2bis $f(x) = x^2$ è Lip. in $[-30, 30]$

$f'(x) = 2x$, quindi la costante è

$$\sup\{|2x| : x \in [-30, 30]\} = 60$$

Esempio 4 bis $f(x) = \sqrt{x}$ in $[1, +\infty)$

$$\sup \{ |f'(x)| : x \geq 1 \} = \sup \{ \frac{1}{2\sqrt{x}} : x \geq 1 \} = \frac{1}{2}$$

Disuguaglianze classiche di Lipschitzianità

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin y| &\leq |x - y| & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ |\cos x - \cos y| &\leq |x - y| & \text{"} \\ |\arctan x - \arctan y| &\leq |x - y| & \text{"} \end{aligned}$$

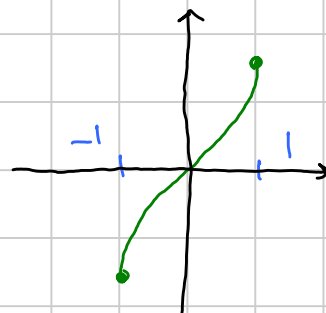
Seguono banalmente dall'essere funzioni con derivata ≤ 1 .

Esempio 5 $f(x) = \arcsin x$ è Lip. in $[-1, 1]$? No

Se lo fosse la sua derivata, dove esiste, sarebbe $\leq L$ e questo non è vero

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

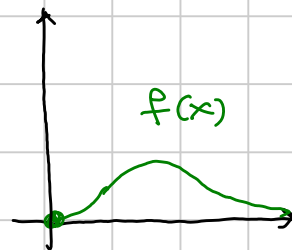
che ha problemi quando $x \rightarrow \pm 1$



Oss. Se f è Lip. in A e $f'(x)$ esiste anche solo in un pto $x_0 \in A$, allora per forza $|f'(x_0)| \leq L$ (questo perché i rapporti incrementali sono limitati)

Esempio 6 $f(x) = x^{20} e^{-x}$ è Lip. in $[0, +\infty)$?

$$f'(x) = 20x^{19}e^{-x} - x^{20}e^{-x}$$



Basta ora osservare che $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$, quindi

per le varianti di Weierstrass $|f'(x)|$ è limitata superiormente, quindi f è Lip.

— o — o —