

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \leq x$.

Considero $f(x) = x - \arctan(x^2)$.

Se fosse monotona...

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$

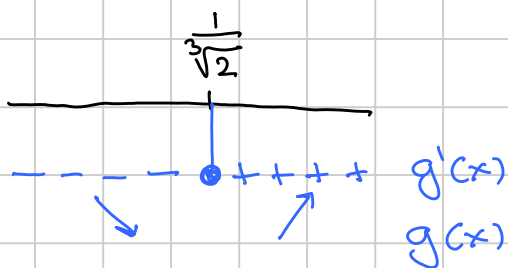
Den. > 0 sempre, quindi il segno dipende dal segno di $1+x^4-2x$.

Pongo $g(x) = x^4 - 2x + 1$ e studio questa

$$g'(x) = 4x^3 - 2$$

Ci sono vari modi di uscire.

1° modo: standard Segno di $g'(x)$



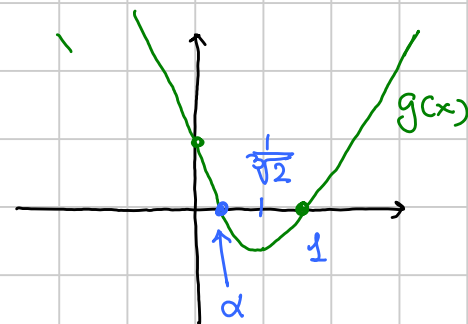
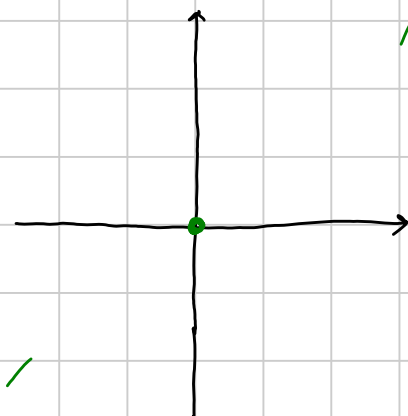
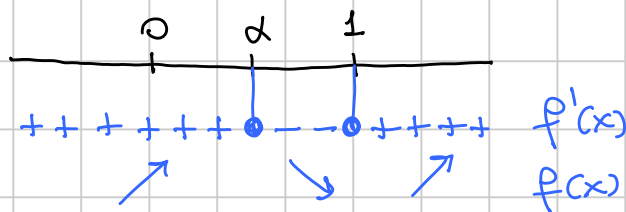
Dal grafico di $g(x)$ abbiamo dedotto che esiste $\alpha \in (0, 1)$ b.c.

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \alpha) \cup (1, +\infty)$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\alpha, 1)$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ oppure } x = 1$$

Dal segno di $g(x)$ deduciamo quello di $f'(x)$, cioè



$$\alpha \in (0, 1)$$

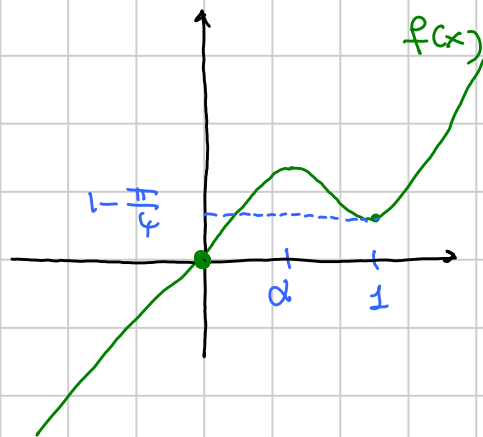
Punto decisivo: calcolare

$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

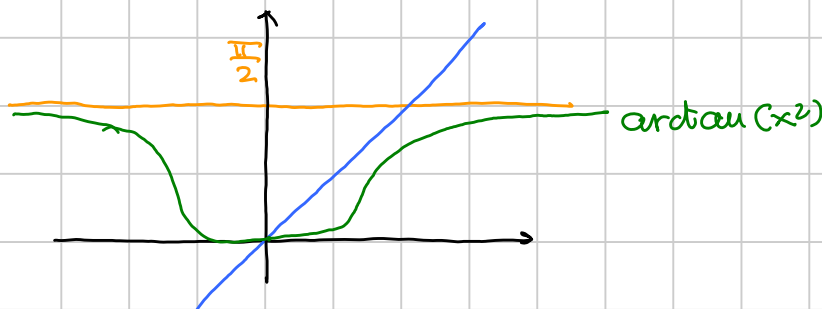
Conclusione

$$\arctan(x^2) \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

con segno di uguale solo per $x=0$.



Confronto tra grafici



2° modo: risparmiando

Per $x < 0$ è ovvio che $\arctan(x^2) > x$

Per $x \in (0,1)$ abbiamo

$$\arctan(x^2) < \arctan x < x$$

$\uparrow$ $x^2 < x$ e $\arctan$ è
monotona $\uparrow$ Disug. classica

per $x > 1$ faccio il conto e $x - \arctan x > 0$

per $x > 1$ riprendo le funzioni precedenti e ho $g'(x) > 0$, quindi $g(x)$ strett. crescente, quindi $g(x) > g(1) = 0$, quindi $f'(x) > 0$, quindi $f(x) > f(1) > 0$, da cui

$$\underline{x} > \underline{\arctan(x^2)}$$

Esempio 2 Dimostrare che esiste una costante $c > 0$ tale che

$$e^x \geq c(x^2 - 7) \quad \forall x \geq 0$$

Idea: isolare c .

$$\frac{e^x}{x^2 - 7} \geq c$$

$\uparrow$ così non è equivalente
perché non posso dividere per roba di segno ignoto

$$\frac{1}{c} \geq (x^2 - 7)e^{-x}$$

$\downarrow$ ok perché ho diviso per e^x

Volendo salvare il primo approccio, posso dire

- per $x \in [0, \sqrt{7}]$ ho $LHS > 0 \geq RHS$ per ogni $c > 0$, quindi la disug. data è gratis
- per $x > \sqrt{7}$ posso dividere e mi riduco a trovare $c > 0$ t.c.

$$\frac{e^x}{x^2 - 7} \geq c \quad \text{per ogni } x > \sqrt{7}$$

Seguiamo la via $\underbrace{(x^2 - 7)e^{-x}}_{f(x)} \leq \frac{1}{c}$

Mi basta dimostrare che $f(x)$ ha massimo per $x \geq 0$ e poi porre $\frac{1}{c} \geq \max$ (in realtà basterebbe

$$\sup \{ f(x) : x \geq 0 \} < +\infty).$$

A questo punto basta osservare che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ per dedurre

che $f(x)$ è limitata inferiormente e superiormente per $x > 0$.

Dalle varianti di Weierstrass segue

che $f(x)$ ammette pure max / min in $x \geq 0$

Dim. che esiste il max Prendo $x = 15$,
cioè un p.to in cui f è > 0 .

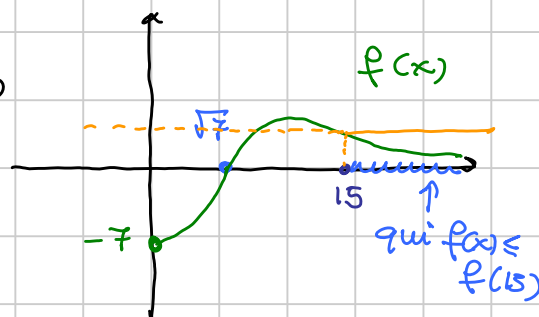
Poiché $f(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$, dalla def. di

limita ho che esiste $k \geq 15$ tale che $f(x) \leq f(15)$ per ogni $x \geq k$

Ora applico W. in $[0, k]$ e trovo il max in $[0, k]$ che è anche max in $[0, +\infty)$ (vedi lezione corrispondente).

Nell'esempio il max si calcola pure

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 - 7)e^{-x} = (2x - x^2 + 7)e^{-x}$$



Quindi $f'(x)$ si annulla dove si annulla $x^2 - 2x - 7$

$$x = 1 + \sqrt{8} = 1 + 2\sqrt{2}$$

Conclusione: il max si ha per $x = 1 + \sqrt{8}$ e vale $f(1 + \sqrt{8})$.

Ponendo $\frac{1}{c} = \max$ si trova non solo che esiste $c > 0$ ma si trova il c ottimale per cui vale.

Esempio 3

- ① $\exists c > 0$ t.c. $x^2 + 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \quad \forall x \in [0, 7]$ OK
- ② $\exists c > 0$ t.c. $x^2 - 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \quad \forall x \in [0, 7]$ NO
- ③ $\exists c > 0$ t.c. $x^2 + 1 \geq c (e^{3x} + \arctan x) \quad \forall x \geq 0$ NO

La ③ è NO perché dovrebbe essere $\frac{1}{c} \geq \frac{e^{3x} + \arctan x}{x^2 + 1}$ per ogni $x \geq 0$ e se faccio il limite per $x \rightarrow +\infty$ il RHS $\rightarrow +\infty$, quindi è assurdo

La ① è OK. La $f(x)$ è continua in $[0, 7]$ per il teorema, quindi per w. ha max e basta prendere $\frac{1}{c} \geq \max$

La ② è NO perché per $x \in (0, 1)$ abbiamo LHS < 0 e RHS > 0 .
Gli approcci basati su isolare c hanno problemi di tutti i tipi

— o — o —