

Motivi per fare uno studio globale di funzioni:

- decidere iniettività / surgettività
- calcolare inf / sup / max / min di una $f(x)$ in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$
- risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$ o $f(x) = \lambda$
- risolvere disequazioni del tipo $f(x) > 0$.

Achtung! È pericoloso risolvere equazioni/disequazioni del tipo

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) > g(x)$$

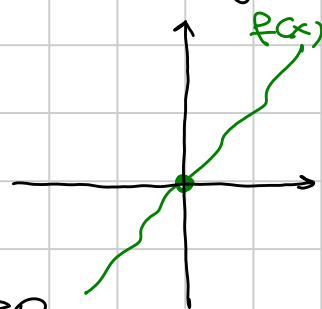
che comportano il confronto tra 2 grafici.

Molto meglio ridursi a $\underbrace{f(x) - g(x)}_{\varphi(x)} = 0$, $\underbrace{f(x) - g(x)}_{\varphi(x)} < 0$

Esempio 1 Risolvere la disequazione $\underbrace{2x + \sin x}_{f(x)} > 0$

Osservo che $f(0) = 0$ e che $f'(x) = 2 + \cos x \geq 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi $f(x)$ è strett. cresc., quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

Conclusione $2x + \sin x > 0 \Leftrightarrow x > 0$



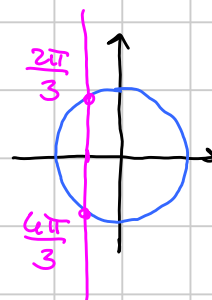
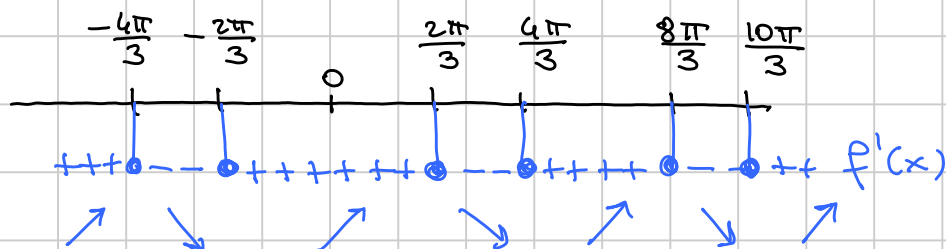
Esempio 2 Risolvere la disequazione $\underbrace{x + 2\sin x}_{f(x)} > 0$

Ora non ho la monotonia.

$$f'(x) = 1 + 2\cos x$$

Provo a capire il segno

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x > -\frac{1}{2}$$



Osservo che $f(0) > 0$ e che f è dispari.

È necessario calcolare

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$$

In tutti i successi p.ti di min. loc., che sono

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{N}) \text{ sarà}$$

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = \underbrace{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}_{\geq \frac{4\pi}{3}} + 2 \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) > 0$$

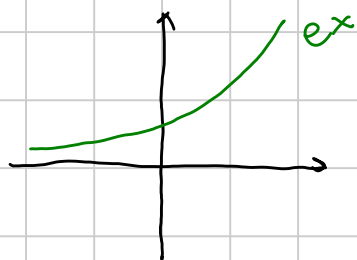
Zoommando indietro il grafico è così $\rightarrow$

$$\text{Conclusione: } \underbrace{x}_{>0} + 2 \underbrace{\sin x}_{>0} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Esempio 3 Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$

Se uno confronta i grafici



Congettura:

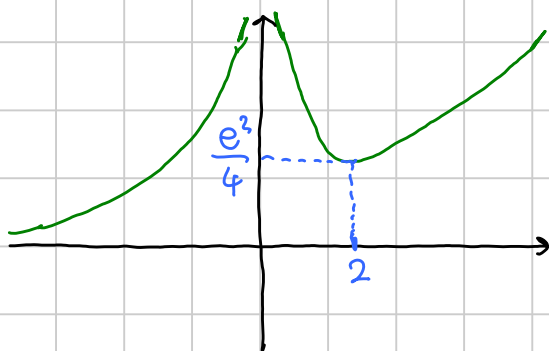
- $\rightarrow$ se $\lambda < 0$ nessuna soluzione
- $\rightarrow$ $\lambda > 0$ piccolo $\leadsto$ 1 soluzione
- $\rightarrow$ $\lambda > 0$ grande $\leadsto$ 2 soluzioni

Metodo sistematico: studio

$$\boxed{\frac{e^x}{x^2}} = \lambda$$

$f(x)$

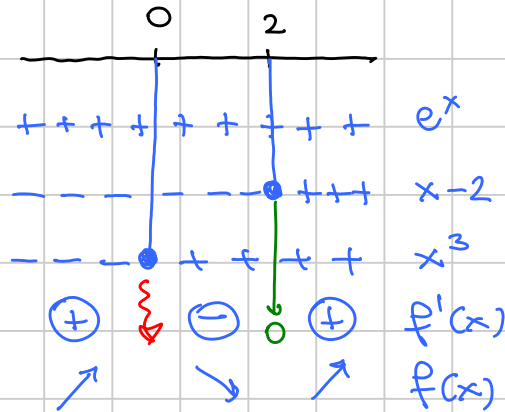
Oss.: dividendo per x^2 non perdo sol. perché $x=0$ non è mai sol.



Calcolo $f'(x)$ per confermare il grafico.

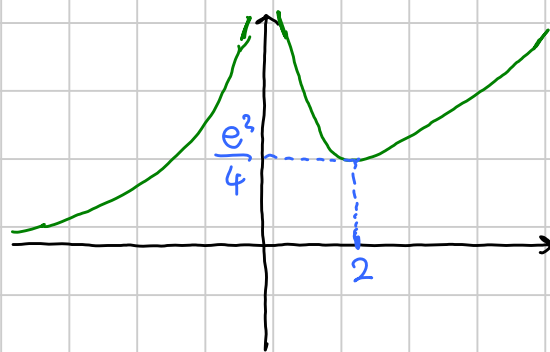
$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$$

Studio il segno di $f'(x)$,
che conferma il grafico e
individua il p.to di
minimo locale in $x=2$
con valore $\frac{e^2}{4}$.

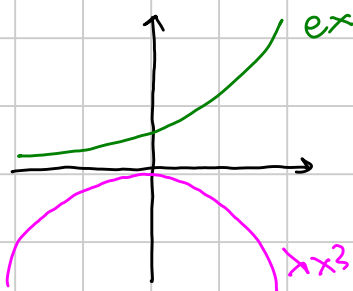


Soluzioni di $f(x) = \lambda$

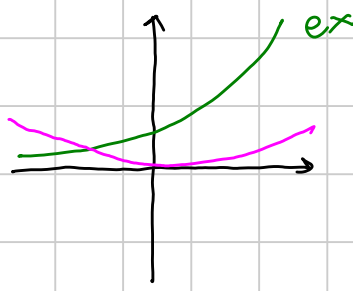
- $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow 0$ sol.
- $0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 1$ sol.
- $\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 2$ sol.
- $\lambda > \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 3$ sol.



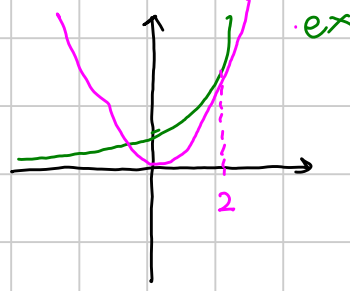
Ora possiamo veramente capire il confronto di grafici



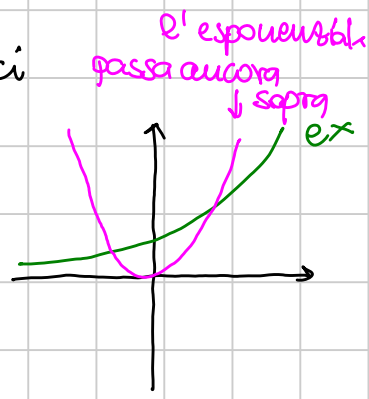
$\lambda \leq 0$



$0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$



$\lambda = \frac{e^2}{4}$



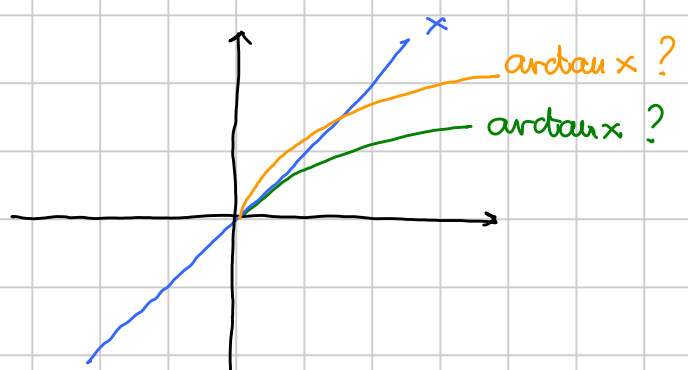
$\lambda > \frac{e^2}{4}$

Esempio 4 Risolvere la disuguaglianza $\arctan x \leq x$

Se confronto i grafici, è pericoloso

Per decidere, studio la funzione

$$f(x) = x - \arctan x$$



Osservo che $f(0) = 0$, $f(x)$ è dispari e

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = + \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

e $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi c'è annullamento sporadico.

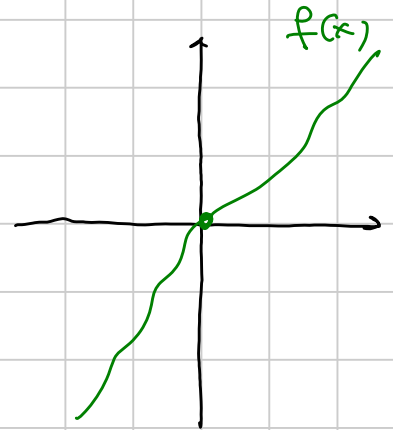
Monotonia 3 $\Rightarrow f(x)$ è strett. crescente quindi

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{Morale: } \arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{con uguaglianza se e solo se } x = 0.$$

— 0 — 0 —



Allo stesso modo si dimostrano le seguenti disuguaglianze:

$$\sin x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\log(1+x) \leq x \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \Leftrightarrow x \geq 0$$

} Inoltre vale il segno di uguale se e solo se $x = 0$

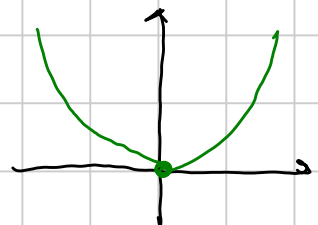
Si potrebbe andare avanti:

$$e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con l'uguaglianza se e solo se } x = 0$$

Volendo dimostrare quest'ultima, studio $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x \geq 0$

Osservo che $f(x)$ è pari, $f(0) = 0$, e $f'(x) = x - \sin x \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ (per disug. precedente) con $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Quindi $f(x)$ è strett. cresc. per $x \geq 0$



$$\text{Analogo: } \sin x \geq x - \frac{x^3}{6} \Leftrightarrow x \geq 0$$

— 0 — 0 —