

Precisazioni sugli asintoti obliqui

1° fatto Può essere che $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \text{ non esiste} \quad (\text{se esiste è per forza } m)$$

Ad esempio

$$f(x) = x + \frac{\sin(x^{20})}{x}$$

È chiaro che $y = x$ è asintoto obliquo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$,

$$\text{ma } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{20x^{19} \cdot \cos x^{20}}{x} - \frac{\sin(x^{20})}{x^2}$$

$\downarrow$ non esiste $\downarrow 0$

2° fatto Gli asintoti orizz. sono un caso particolare di asintoto obliquo.

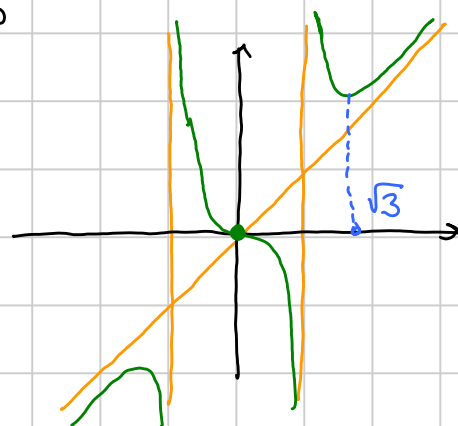
3° fatto Può esistere $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ ma non esserci

l'asintoto obliquo a $+\infty$.

Esempio: $f(x) = 2x + \log x$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

Un asintoto obliquo dà una info sulla crescita della funzione a $\pm\infty$



Nell'esempio, per decidere se $f(x)$ "tende all'asintoto" da sopra o da sotto posso risolvere $f(x) = x$ oppure $f(x) > x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2-1} - x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Punto 8 Convessità / Concavità

"Def. geometrica di convessità"

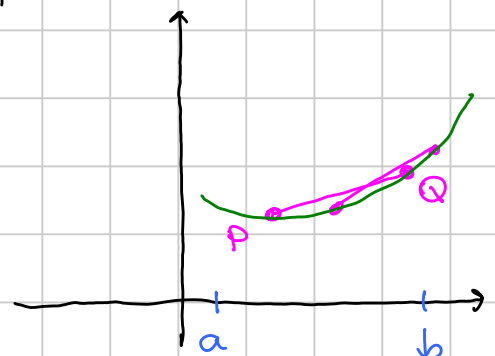
Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ si dice convesso se per ogni a e b in D si ha che tutto il segmento $[a, b] \subseteq D$.

Esercizio I sottoinsiemi $D \subseteq \mathbb{R}$ convessi sono tutti e soli quelli del seguente elenco:

- banali: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, un solo p.to
- intervalli, con o senza estremi
- semirette, con o senza estremi

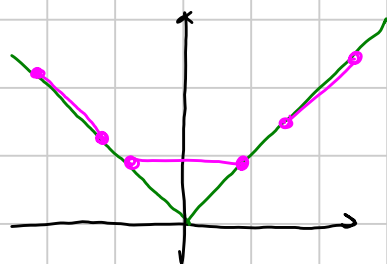
Idea della dim.: prendo $\sup D$ e $\inf D$ e mostro che tutti i p.ti strettamente compresi stanno in D .

"Def" Sia D un insieme convesso. Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se per ogni coppia di punti P e Q del grafico, tutto il segmento PQ sta "sopra" il grafico.
Si dice concava se PQ sta sempre "sotto" il grafico, cioè se $-f(x)$ è convessa.



Precisazione: quella data è la definizione di debolmente convessa. Strettamente convessa vuol dire che grafico e segmento si incontrano solo agli estremi.

Esempio $f(x) = |x|$



convessa, ma non strett. convessa

$f(x) = x^2$ non strett. convessa.

Teorema misterioso (convessità e derivata seconda)

Sia D un insieme convesso e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f''(x)$ esista in D .

Allora valgono le seguenti implicazioni:

(i) Se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$, allora f è convessa in D

(ii) Se f è convessa in D , allora $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$

(iii) Se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$, allora f è strett. conv. in D

(iv) Se f è strett. conv. in D , allora $f''(x) > 0$ per ogni $x \in D$

NO

Esempio $f(x) = x^4$ è strett. conv. in $\mathbb{R}$, ma $f''(x) = 12x^2$ si annulla in $x = 0$.

Achtung! Una funzione può essere convessa e avere $f'(x)$ che non esiste da qualche parte (figuriamoci $f''(x)$)
(ad esempio $f(x) = |x|$ ha f' che non esiste in $x = 0$).

Teorema misterioso (convessità e retta tangente)

Il grafico di una funzione convessa sta sopra tutte le rette tangenti che esistono.

Oss. Una funzione convessa ma non strettamente convessa ha il grafico con dei tratti rettilinei.



In questi tratti $f''(x) \equiv 0$,

quindi vale una specie di monotonia 3:

se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e non esiste nessun intervallo $[a, b] \subseteq D$ in cui $f''(x) = 0$ a tappeto, allora $f(x)$ è convessa strettamente in D .

Esempio $f(x) = \arctan x$

Ci aspettiamo

- convessa in $(-\infty, 0]$
- concava in $[0, +\infty)$

Si può verificare con $f''(x)$



Def. Si dice che x_0 è un p.to di flesso per $f(x)$ se esiste $\delta > 0$ t.c.

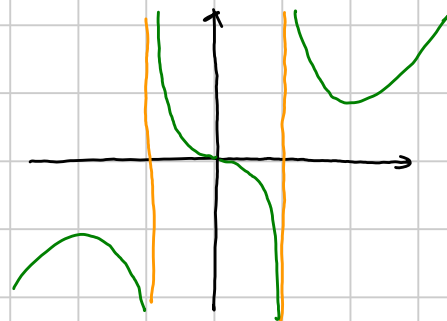
f è convessa in $[x_0, x_0 + \delta]$ } o viceversa
 f è concava in $[x_0 - \delta, x_0]$

Nei p.ti di flesso la retta tangente (posto che esista) attraversa il grafico (cioè $f(x)$ sta sopra a s_x e sotto a s_x , o viceversa).

Tornando all'esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$, ci aspettiamo che sia

- convessa in $(-1, 0]$ e in $(1, +\infty)$
- concava in $(-\infty, -1)$ e in $[0, 1)$.

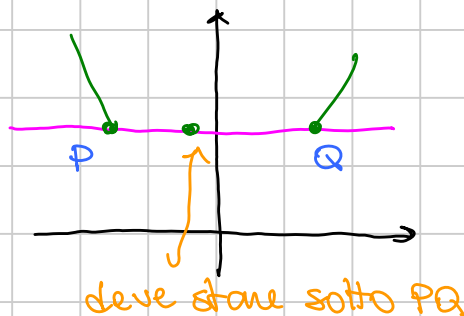
Ci aspettiamo che $x = 0$ sia l'unico p.to di flesso



Oss. In un p.to di flesso la derivata 2^a, se esiste, si annulla.
Now vale il viceversa, cioè può essere $f''(x_0) = 0$ senza che x_0 sia un p.to di flesso.
(Pensare a $f(x) = 3x + x^4$)

Esercizio Se $f(x)$ è strett. convessa, allora l'eq.
 $f(x) = \lambda$
ha al massimo 2 soluzioni!

Dim. Se ne avesse 3 ...



Domanda : se $f(x)$ e $g(x)$ sono strett. convesse e non coincidono in nessun intervallo, cosa possiamo dire del numero di soluzioni di

$$f(x) = g(x)$$

Niente ! Possono anche essere infinite

Esempio : $f(x) = 7x^2$ $g(x) = 7x^2 + \sin x$