

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

Obiettivo : capire il grafico di una funzione su tutto l'insieme di definizione

Esempio $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

Punto 1 Eventuali simmetrie. In questo caso è dispari
 $f(-x) = -f(x)$

Punto 2 Dove ha senso e dove è continua: $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$
 In questa zona è continua per teo. sulle funzioni continue

Punto 3 Limiti agli estremi della zona di continuità. In questo caso

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

(Quelli della seconda riga sono i primi cambiati di segno)

Punto 4 Zeri e segno, cioè risolvere

$$f(x) = 0 \iff x = 0$$

$$f(x) > 0 \iff x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

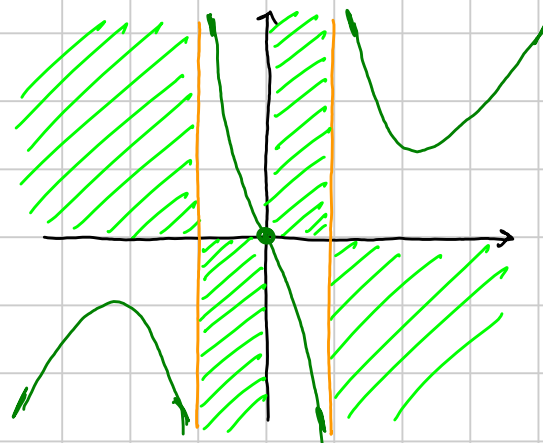
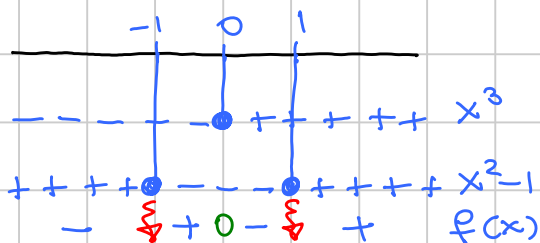


Grafico "supposto"

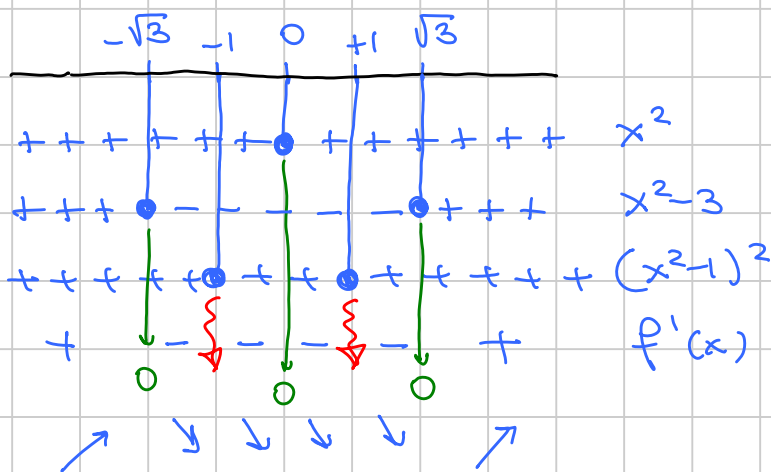
Punto 5 Seguo della derivata e monotonia.

$f(x)$ è derivabile per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}$ e

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Voglio risolvere $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$



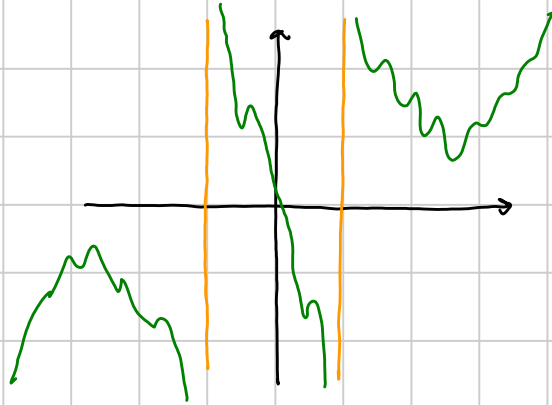
Possiamo dire che $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$ sono p.ti di min / max locale.

Punto 6 P.ti di max / min locale e globale (occhio: globale $\Rightarrow$ locale):
 $x = \sqrt{3}$ (min. loc.)
 $x = -\sqrt{3}$ (max. loc.)

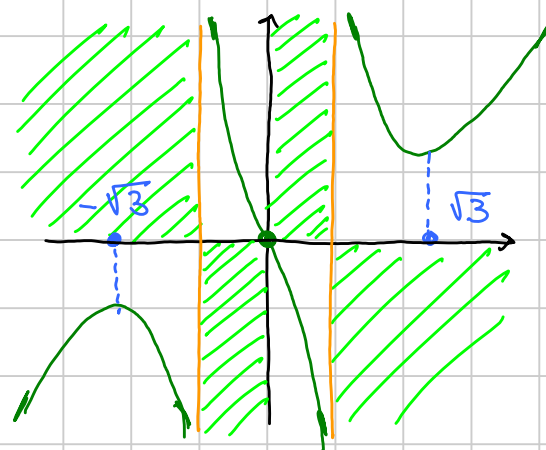
Globali non ce ne sono.

Complementi al p.to 5 : classi di regolarità

Si dice che $f \in C^0(D)$ se f è continua in ogni p.to di $D \subseteq \mathbb{R}$
 (nel vostro caso $f \in C^0(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}}_D)$)



Altro grafico compatibile con i primi 4 p.ti.



Si dice che $f \in C^1(D)$ se f è derivabile in D e $f' \in C^0(D)$
~ ~ ~ $f \in C^k(D)$ se f è derivabile k volte (almeno) in
 D e $f^{(k)} \in C^0(D)$.

Si dice che $f \in C^\infty(D)$ se $f \in C^k(D)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Oss. Da C^1 in poi c'è come prerequisito che D sia **APERTO**, cioè
che ogni p.to di D sia interno a D , cioè
 $\forall x \in D \exists \delta > 0$ t.c. $(x-\delta, x+\delta) \subseteq D$.

Esempi classici di insieme aperto:

- tutto $\mathbb{R}$
- intervalli senza estremi: (a, b)
- semirette senza estremi: $(-\infty, a)$ oppure $(a, +\infty)$.

Def. estesa (nel caso di intervalli $[a, b]$ o semirette $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$)
Si dice che $f \in C^1([a, b])$ se $f \in C^1((a, b))$ ed esiste
 $g \in C^0([a, b])$ tale che $g(x) = f'(x)$ per ogni $x \in (a, b)$.
(sostanzialmente f' è continua in (a, b) e si può estendere ad
una funzione continua g definita in tutto $[a, b]$)

Esercizio La definizione sopra è equivalente a definire $f'(x)$
anche agli estremi come limite del rapp. increm. $\Delta x / \Delta y$ e
imporre la continuità in $[a, b]$.

Analogamente si definisce $f \in C^k([a, b])$ e C^∞ ...

Nell'esempio possiamo dire che $f \in C^\infty(\underbrace{\mathbb{R} \setminus \{+1, -1\}}_{\text{insieme aperto}})$

Punto 7 Asintoti $\rightarrow$ orizzontali
 $\rightarrow$ verticali
 $\rightarrow$ obliqui

Asintoti orizz. La retta $y = l$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow +\infty$ se
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

La stessa retta è asintoto orizz. per $x \rightarrow -\infty$ se
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l.$$

Asintoto verticale La retta $x = x_0$ è asintoto verticale per $f(x)$ se succede almeno una di queste 4 possibilità

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \begin{matrix} \nearrow +\infty \\ \searrow -\infty \end{matrix}$$

Nell'esempio le rette $x = +1$ e $x = -1$ sono asintoti vert.

Asintoto obliquo La retta $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

La retta ... per $x \rightarrow -\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx - n) = 0$$

Come calcolo gli asintoti obliqui? Esistono se e solo se

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] \in \mathbb{R}$$

Dim. Se $y = mx + n$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{f(x) - mx - n}{x}}_{\substack{\downarrow \\ \frac{0}{+\infty} = 0}} + \underbrace{\frac{mx + n}{x}}_{\substack{\downarrow \\ m}} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{[f(x) - mx - n]}_0 + n = n$$

Altra implicazione: se i due limiti sono reali, allora dal secondo limite deduco che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(f(x) - mx - n)}_n = n - n = 0$$

Oss. Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m \in \mathbb{R}$. Possiamo

$$\text{dedurre che } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

C'è una implicazione: se $\frac{f(x)}{x}$ è una forma del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, allora posso provare con De L'Hôpital e ottenere

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1}$$

↑
a patto che il 2° esista.

$$\text{Nell'esempio } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2-1} = 0 \end{aligned}$$

quindi $y = x$ è asintoto obliquo.