

MAX-MIN per funzioni di una variabile

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad A \neq \emptyset \quad f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\{f(x) : x \in A\} = f(A) = \text{insieme dei valori assunti da } f(x) \text{ quando } x \text{ varia in } A$$

Def. Si dice che $M = \max \{f(x) : x \in A\}$ se

(i) $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$,

(ii) $\exists x \in A$ b.c. $f(x) = M$.

Tutti i p.ti x che soddisfanno (ii) si dicono p.ti di max.

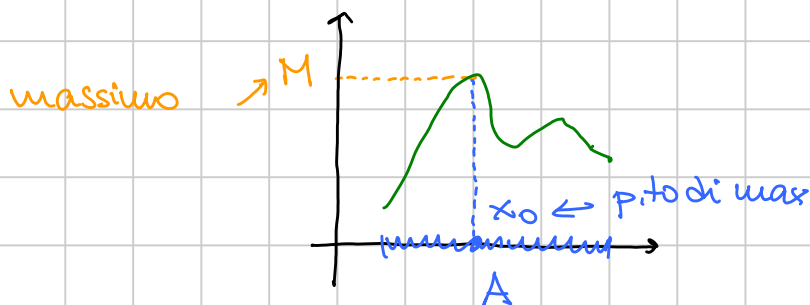
Oss. ① Il max non è obbligato ad esistere

② Se esiste è unico

③ Se anche esiste il max, i p.ti di max possono non essere unici

Achtung! Non confondere MAI

- il massimo M , che è un valore assunto dalla funzione (è "una y ")
- i p.ti di massimo, che sono "le x " in cui il valore M viene raggiunto



Definizioni analoghe valgono per minimo e p.ti di minimo.

Teorema misterioso (WEIERSTRASS edulcorato)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Allora esistono per forza

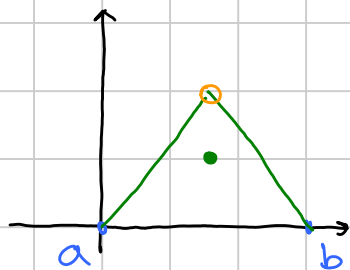
$$\begin{aligned} &\max \{ f(x) : x \in [a, b] \} \\ &\min \{ f(x) : x \in [a, b] \} \end{aligned}$$

Oss. Le ipotesi importanti sono che

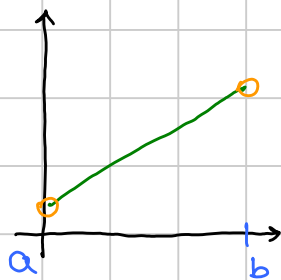
- f è continua
- L'intervallo comprende gli estremi
- L'intervallo è un insieme limitato

Quando falliscono le ipotesi (almeno una), allora BOH, cioè max/min possono esistere oppure no.

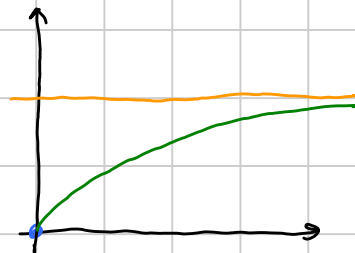
Esempi



Manca continuità
in un p.to



Mancano gli
estremi all'interv.



L'insieme è la
semiretta $[0, +\infty)$

- Esercizi
- ① Esiste $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
 - ② Esiste $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua che non ha né max, né min?
 - ③ Esiste $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua per ogni $x \neq \frac{1}{2}$ che non ha né max, né min?

Esempio facile Esiste $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continua (o anche no) che ha sia max sia min.

Data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, come trovo max e min?

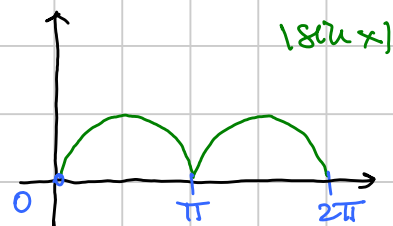
I candidati ad essere p.ti di max/min. ricadono in queste 3 categorie

- p.ti STAZIONARI INTERNI: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x) = 0$
- p.ti SINGOLARI INTERNI: p.ti $x \in (a, b)$ t.c. $f'(x)$ non esiste
- p.ti del BORDO: $x = a$ e $x = b$,

Operativamente: trovo i p.ti delle 3 categorie, li sostituisco tutti nella funzione: quelli in cui vale di più sono i p.ti di max, quelli in cui vale meno sono i p.ti di min.

Esempio 1 $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f(x) = |\sin x|$

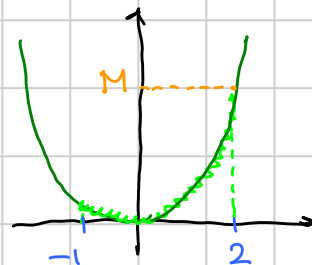
Max = 1 p.ti di max: $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$
↑ ↑
stazionari interni



min = 0 p.ti di min: $x = 0, x = 2\pi, x = \pi$
↑ ↑ ↑
bordo bordo singolare interno

Esempio 2 $[a, b] = [-1, 2]$, $f(x) = x^2$

Max = 4 p.to di max: $x = 2$
↑
bordo



min = 0 p.to di min: $x = 0$
↑
stazionario interno

Esempio 3 $[0, b] = [0, 1]$ $f(x) = x^3 - x^2$

- stazionari interni : $f'(x) = 0$
 $3x^2 - 2x = 0$
 $x(3x - 2) = 0$

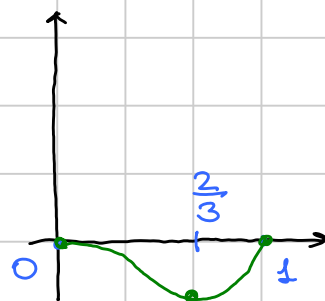
$$x = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

← stazionario interno

- singolari interni : $\emptyset$ (f è derivabile ovunque)

- bordo : $x = 0$ $x = 1$



Ho 3 candidati : $x = 0 \rightsquigarrow f(0) = 0 \leftarrow \text{Max}$
 $x = 1 \rightsquigarrow f(1) = 0 \leftarrow \text{Max}$
 $x = \frac{2}{3} \rightsquigarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = -\frac{4}{27} \leftarrow \text{min}$

Max = 0 p.ti di max : $x = 0$ e $x = 1$
↑ bordo ↑

Min = $-\frac{4}{27}$ p.to di min : $x = \frac{2}{3} \leftarrow \text{staz. interno}$

Oss. • Non è detto che tutti i candidati siano alla fine p.to di max / min.

- Se ci sono dubbi su un p.to singolare, tanto vale metterlo in elenco e male non fa.

Esempio $f(x) = x |\sin x|$

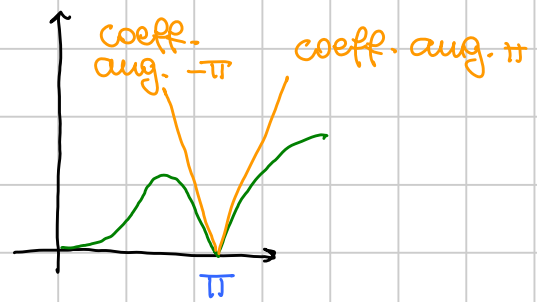
$x = 0$ è un p.to singolare? NO, perché $f'(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h} |\sin \cancel{h}|}{\cancel{h}} = 0$$

$x = \pi$ è un p.to singolare? SI, perché

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+h) |\sin(\pi+h)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\pi+h) \sin h}{h} = \pi$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h} = \dots = -\pi$$



— o — o —

PRIMA VARIANTE DI W.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica e continua.

Allora $\max$ e $\min$ esistono per forza

[Dim.] Sia T **UN** periodo qualunque. Allora per W. vero esiste

$$m = \min \{ f(x) : x \in [0, T] \}$$

e sia $x_0 \in [0, T]$ un qualunque p.to di min. corrispondente. Allora dico che

$$m = \min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}.$$

Infatti, preso un qualunque $x \in \mathbb{R}$ esiste un $y \in [0, T]$ tale che

$$x = y + kT \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Per periodicit 

$$f(x) = f(y) \geq m$$

Quindi $f(x) \geq m$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

D'altra parte, gi  sappiamo che $\exists x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = m$.



Per dimostrare per bene l'esistenza di y (dato x) considero i p.ti del tipo kT . Allora per forza

$\exists k_0 \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$k_0 T \leq x < (k_0 + 1) T$$

questi intervalli ricoprono la retta

Ora $y := x - k_0 T$.

— o — o —