

Esempio 1 Dimostrare che l'equazione

$$\underbrace{x^7 - \sin x^3 + \log(1+x^{20})}_{f(x)} = 2014$$

ha almeno una soluzione reale.

Banale: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (comanda x^7)

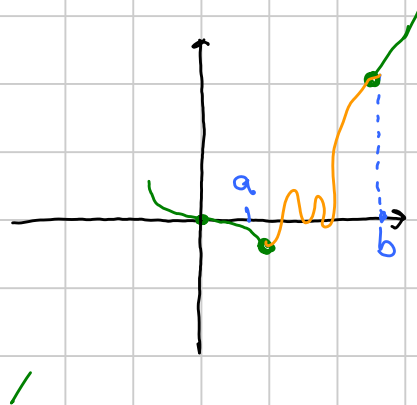
Essendo anche f continua, questo garantisce che $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva. Questo garantisce che $f(x) = \lambda$ ha almeno una sol. reale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esempio 2 La $f(x)$ di prima è iniettiva?

No! Perché $f(x) = -x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow \infty$
quindi $f(x)$ ha in $x = 0$ un
flesso a tg. orizz. discendente.
A questo p.to l'equazione

$$f(x) = 0$$

ha almeno 3 soluzioni reali, quindi f non è iniettiva



Dim. rigorosa che $\exists x > 0$ t.c. $f(x) = 0$

• Dallo studio locale: $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < 0$ in $(0, \delta)$.

Prendo $a \in (0, \delta)$

• Dal limite a $+\infty$: $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) > 0 \quad \forall x \geq k$

Prendo $b > a$ e $b > k$

Applico il teo. esistenza degli zeri in $[a, b]$.

Esempio 3 La funzione $f(x) = x + \sin x$, vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettiva? surgettiva?

Surgettiva SI: basta guardare i limiti per $x \rightarrow \pm\infty$

Iniettiva: vedo se per caso è monotona.

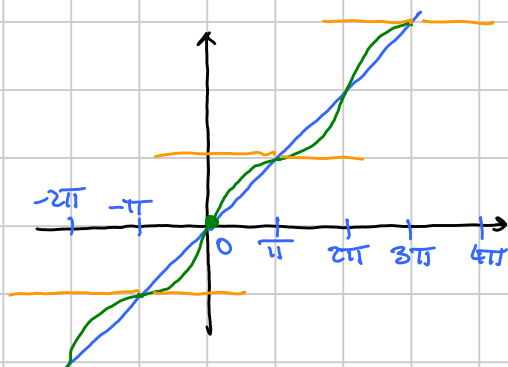
$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi per lo meno è debolmente crescente. Ora

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

quindi annullamento sporadico, quindi è strett. crescente, dunque iniettiva.

I p.ti $x = \pi + 2k\pi$
sono tutti p.ti di flesso
a tangente orizz. ascendente.



Generalizzazione Le funzioni $x \pm a \sin x$, $x \pm a \cos x$ sono iniettive e surgettive ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) se e solo se $|a| \leq 1$. Per $|a| > 1$ viene meno l'iniettività in quanto

$$f'(x) = 1 \pm a \cos x \quad (= 1 \pm a \sin x)$$

e quindi ci sono intervalli con $f'(x) \geq 0$ e altri con $f'(x) < 0$.

— o — o —

Esempio 4 Una funzione continua che ha un p.to di minimo locale non può essere iniettiva.

Idem per il massimo locale.



Idea: devo trovare un valore λ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni

Dim. Per def. di p.to di min. locale

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \text{ t.c. } f(x) &> f(x_0) & \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \\ f(x) &> f(x_0) & \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \end{aligned}$$

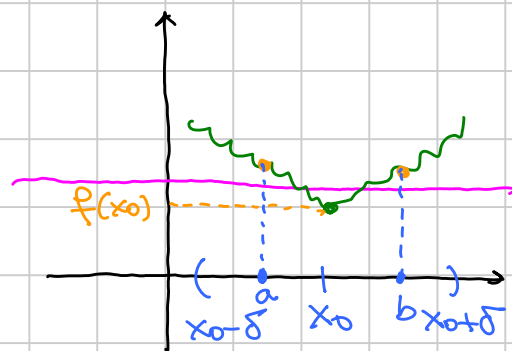
Prendo $a = x_0 - \frac{\delta}{2}$, $b = x_0 + \frac{\delta}{2}$. Ora scelgo

$$f(x_0) < \lambda < \min \left\{ f\left(x_0 - \frac{\delta}{2}\right), f\left(x_0 + \frac{\delta}{2}\right) \right\}$$

Dico che $f(x) = \lambda$ ha almeno 2 soluzioni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

In fatti

- c'è una sol. in (x_0, b) per il te. dei valori intermedi
- c'è una sol. in (a, x_0) per lo stesso motivo.

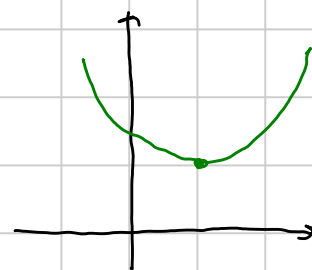
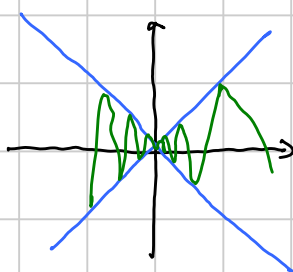


— o — o —

Oss. Se f ha un p.to di min. locale in x_0 , NON è detto che
 $\exists \delta > 0$ t.c. f è crescente in $(x_0, x_0 + \delta)$
 f è decrescente in $(x_0 - \delta, x_0)$

Esempio $|x| \sin \frac{1}{x}$

Questo non va

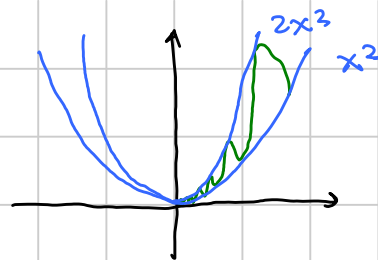


Altro esempio

$$f(x) = x^2 + x^2 \sin^2 \frac{1}{x^{20}}$$

$$f'(x) = 2x + 2x \sin^2 \frac{1}{x^{20}} - \boxed{x^2 \cdot 2 \sin \frac{1}{x^{20}} \cos \frac{1}{x^{20}} \frac{20}{x^{21}}}$$

vicino a 0 ci sono valori
per cui è positivo enorme e
valori per cui è neg. enorme



Esempio

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

se $x=0$

se $x \neq 0$

f è continua in $x=0$ e
quindi su tutto $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2}{x^3} \quad \text{per } x \neq 0$$



In $x=0$ faccio il rapporto incrementale e diventa

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

Questo mostra che f è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e f' è continua
ovunque (anche in 0).

Per inclusione si dimostra che esistono tutte le derivate e
sono del tipo

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

↑ P_k e Q_k polinomi

Conseguenza: f è derivabile infinite volte e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k .

Quindi ha lo sviluppo di Taylor per ogni n ed è il polinomio nullo

$$f(x) = o(x^n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Usando questa si possono pensare esempi del tipo

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin \frac{1}{x} \quad \text{o peggio!}$$

— 0 — 0 —