

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

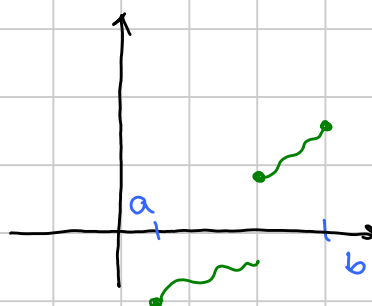
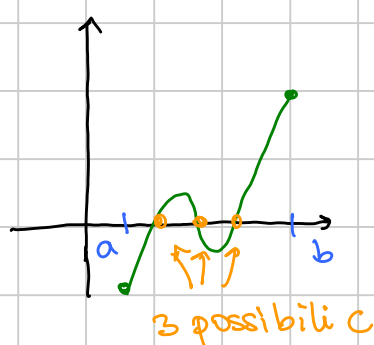
(i) f continua in $[a, b]$

(ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$ (come dire che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso)

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che
 $f(c) = 0$

Oss. ① Non è detto che c sia unico

② L'ipotesi di continuità è essenziale



Dim 1: $\inf / \sup$ + assurdo wlog $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Pongo

$$c := \inf \{ x \in [a, b] \text{ t.c. } f(x) > 0 \}$$

non vuoto perché almeno c'è $x=b$

Dico che c è il p.to richiesto. Per definizione di $\inf$ deve succedere

(1) $f(x) \leq 0$ per ogni $x < c$, $x \in [a, b]$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in (c, c+\varepsilon)$ t.c. $f(x) > 0$

Suppongo per assurdo che $f(c) \neq 0$.



Caso 1: $f(c) > 0$ Per continuità $\exists \delta > 0$ t.c.

$f(x) > 0$ per ogni $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Questo è
 contro il p.to (1) guardando a sx di c .



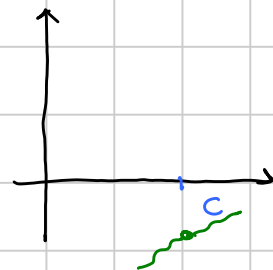
Caso 2: $f(c) < 0$ Per continuità $\exists \delta > 0$ t.c.

$f(x) < 0$ per ogni $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Questo è contro il pto (2) guardando a dx di c.

Detto meglio: preso $\varepsilon = \delta$ dovrei trovare

$x \in (c, c+\delta)$ t.c. $f(x) > 0$ e invece non lo trova.



L'unica possibilità rimasta è che $f(c) = 0$.

— 0 — 0 —

Esercizi Capire se si può fare la dim. (e come) iniziando con

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) \geq 0 \}$$

$$c := \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

$$c := \sim \left\{ \sim \quad f(x) \leq 0 \right\}$$

Fare un esempio in cui le 4 possibilità producano 4 valori di c diversi,

— 0 — 0 —

Dim. 2: inf / sup + diretta Inizio come prima

$$c := \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Ora osservo che

(1) $f(x) \leq 0$ per ogni $x \leq c$, quindi

$$f(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq 0$$

↑
perché f è continua

(2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in (c, c+\varepsilon)$ t.c. $f(x) > 0$

Per ogni $n \geq 1$, la applico con $\varepsilon = \frac{1}{n}$ e trovo un pto

$c_n \in (c, c + \frac{1}{n})$ t.c. $f(c_n) > 0$.

Ora $c_n \rightarrow c$ per i Carabinieri: $c \leq c_n \leq c + \frac{1}{n}$

Ma allora

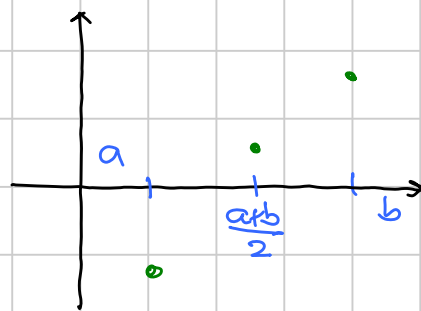
funz. succ. + continuità

$$f(c) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_n) \geq 0$$

Avevamo $f(c) \geq 0$ e $f(c) \leq 0$, deve essere per forza $f(c) = 0$.

Dim 3: BISEZIONE

Idea: ad ogni passaggio divido l'intervallo in 2 parti e scelgo una delle 2 parti in cui valgono ancora le ipotesi



Pongo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Considero $\frac{a_0 + b_0}{2}$.

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) = 0$, allora ho trovato c .

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) > 0$, allora valgono le ipotesi in $\left[\underset{a_1}{a_0}, \underset{b_1}{\frac{a_0 + b_0}{2}}\right]$

Se $f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right) < 0$, allora valgono le ipotesi in $\left[\frac{a_0 + b_0}{2}, \underset{b_1}{b_0}\right]$

Proseguendo in questo modo o ad un certo p.to trovo un c in cui f si annulla, oppure ottengo una succ. di intervalli $[a_n, b_n]$, ognuno uguale a metà del precedente e tali che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$.

Idea: gli intervallini convergono ad un p.to in cui f si annulla

Rigorosamente: a_n è debolm. crescente e sup. limitata (da b)
quindi $a_n \rightarrow a_\infty$ (teo. succ. monotone)

Analogamente: b_n è debolm. decresc. e inf. limitata (da a)
quindi $b_n \rightarrow b_\infty$

D'altra parte

$$\begin{array}{ccc} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} & \text{(banale induzione)} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & \\ b_\infty - a_\infty = 0 & \end{array}$$

quindi $a_\infty = b_\infty$ e d'ora in poi lo chiamo c .

La conclusione è come nella dim. 2

$$\left. \begin{array}{l} \bullet a_n \rightarrow c, f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0 \\ \bullet b_n \rightarrow c, f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0 \end{array} \right\} f(c) = 0.$$

— o — o —

Oss. In tutte queste dim. il pto c è limite di successioni in cui $f > 0$ e di successioni in cui $f < 0$.

Teorema (Teorema dei valori intermedi) (INTERMEDIATE VALUE THM.)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f è continua in $[a, b]$

(ii) $f(a) < \lambda$ e $f(b) > \lambda$ (o viceversa)

Allora:

$$\exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

Dim. Applico il teo. di esistenza degli zeri a
 $g(x) := f(x) - \lambda$. $\square$

Corollario 1 Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Siano

$$l := \inf \{ f(x) : x \in (a, b) \} \quad L := \sup \{ f(x) : x \in (a, b) \}$$

(possono essere reali oppure $\pm \infty$)

$$\text{Allora } \forall \lambda \text{ t.c. } l < \lambda < L \quad \exists c \in (a, b) \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

Oss. Altro modo di dire la stessa cosa: f assume tutti i valori strettamente compresi tra il suo inf ed il suo sup. I valori l ed L li può assumere o no a seconda dei casi.

Dim. Per la caratterizzazione dell'inf
esiste un p.to $A \in (a, b)$ t.c. $f(A) < \lambda$



Per la caratterizzazione del sup

esiste un p.to $B \in (a, b)$ t.c. $f(B) > \lambda$.

Basta applicare il te. dei valori intermedi nell'intervallo
di estremi A e B (non so quale dei 2 è più grande).

Esempio 1 $f(x) = \log x + x^{28} + \sin(x^2)$

Pensata come $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva.

Basta osservare che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Quindi $\inf \{ f(x) : x > 0 \} = -\infty$

$\sup \{ f(x) : x > 0 \} = +\infty$

e quindi f assume tutti i valori
intermedi, cioè tutti i possibili valori
reali.

