

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

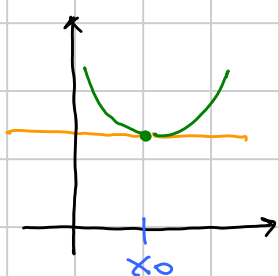
Obiettivo Dato un p.to x_0 , capire come è fatto il grafico di $f(x)$ un po' dopo x_0 e un po' prima di x_0

Primo risultato: monotonia $\pm$ (se conosco il segno di $f'(x_0)$, so confrontare $f(x_0)$ con $f(x)$ per x "vicino" a x_0)

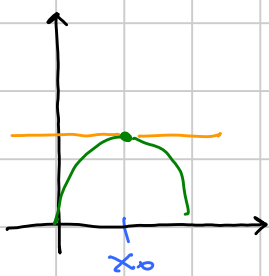
Cosa succede quando $f'(x_0) = 0$

Def. Un p.to x_0 si dice stazionario per $f(x)$ se $f'(x_0) = 0$
(prequisito: x_0 è p.to interno alla zona di def. di f).

Possibili comportamenti vicino ad un p.to stazionario:



MIN. LOC.



MAX. LOC.

p.to di flesso
a tang. orizz.
ascendentep.to di flesso
a tang. orizz.
discendente

C'è poi un quinto possibile comportamento patologico.

MIN. LOC. $\leadsto \exists \delta > 0$ t.c. $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

FLESSO. TANG. ORIZ. DISC. $\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$
 $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

Criterio delle derivate successive

Sappiamo che $f'(x_0) = 0$. Supponiamo che esista $k \geq 2$ intero t.c.,

$$f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(k)}(x_0) \neq 0$$

(siamo supponendo che la k -esima derivata di f sia la prima a non annullarsi in x_0)

Allora

k pari	$\nearrow$	$f^{(k)}(x_0) > 0$	$\rightsquigarrow$	
	$\searrow$	$f^{(k)}(x_0) < 0$	$\rightsquigarrow$	
k dispari	$\nearrow$	$f^{(k)}(x_0) > 0$	$\rightsquigarrow$	
	$\searrow$	$f^{(k)}(x_0) < 0$	$\rightsquigarrow$	

Dim. Taylor !!!

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} R^k + o(R^k)$$

da cui

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Prendiamo uno qualunque dei 4 casi

k pari, $f^{(k)}(x_0) < 0$ Il lim è < 0 , quindi frazione < 0 per $R \in (-\delta_0, \delta_0) \setminus \{0\}$.

Essendo k pari, il denom. è positivo, quindi il num. è < 0 , cioè $f(x_0 + R) < f(x_0)$ sia in $(-\delta_0, 0)$ sia in $(0, \delta_0)$.

Questo dice che x_0 è pto di max,

Altro caso k dispari, $f^{(k)}(x_0) > 0$ Il lim. è > 0 , quindi

$\exists \delta_0 > 0$ t.c. la funzione è > 0 in $(-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0)$.

Essendo k dispari

- per $h \in (0, \delta_0)$ ho denum. > 0 , quindi num. > 0 , quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ (un po' dopo vale di più)
- per $h \in (-\delta_0, 0)$ ho denum. < 0 , quindi num. < 0 , quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ (un po' prima vale di meno)

Per def. questo è il fless. a tg. orizz. ascendente.

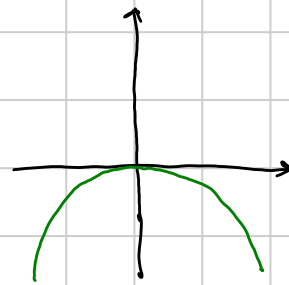
Studio locale: una funzione si comporta vicino ad x_0 come il primo termine non nullo e non costante del suo polinomio di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = x^{20} - \sin x^4$

Come è fatto il grafico vicino all'origine?

Risposta: $f(x) = -x^4 + o(x^4) \rightsquigarrow$ si comporta come $-x^4$
 $\rightsquigarrow$ max. locale

Perché $x_0 = 0$ è un p.to stat.?



modo antico: calcolo $f'(x)$ e verifico che $f'(0) = 0$

modo nuovo: $f'(0)$ compare nel coeff. di x del polinomio di Taylor di $f(x)$. Ora x non c'è, quindi coeff. $= 0$, quindi $f'(0) = 0$.

Varianti: quanto vale $f^{(2014)}(0)$? Vale 0 perché nello sviluppo di Taylor ci sono solo potenze multiple di 4.

Lo studio locale ci dice anche che f NON è iniettiva.

Calcoliamo $f^{(2020)}(0)$. Penso allo sviluppo di Taylor

$$f(x) = -x^4 - \frac{1}{3!}x^{12} - \frac{1}{5!}x^{20} - \frac{1}{7!}x^{28} \dots - \frac{1}{505!}x^{2020}$$

$\downarrow$
 $\frac{f^{(2020)}(0)}{2020!} x^{2020}$

Da qui $f^{(2020)}(0) = -\frac{2020!}{505!}$

— 0 — 0 —

Esempio 2

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

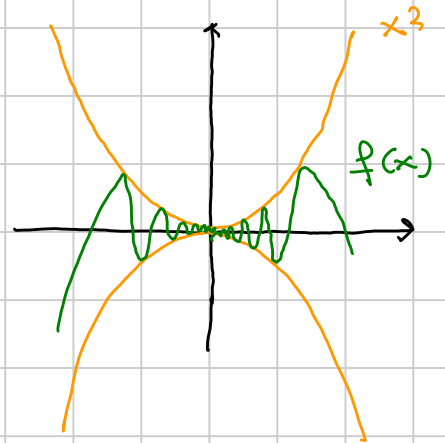
È facile vedere che non ha nessuno dei 4 comportamenti.

Perché $x=0$ è un p.to stazionario?

Calcolo $f'(0)$ usando la definizione

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \quad (\text{carabinieri})$$



Esempio 3

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x^{20} \sin \frac{1}{x^{40}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

È evidente che $f(x) = o(x^{19})$ per $x \rightarrow 0$ (basta dividere e fare il limite)
quindi ammette polinomio di Taylor di ordine 19 (il polinomio nullo).

Si verifica che $f'(x)$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$ (anche $x=0$)
ma non è continua in $x=0$, quindi $f''(0)$ NON ESISTE.

Esempio 4

$$f(x) = \begin{cases} x + 7x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si verifica che $f'(0)$ esiste e vale 1 (è somma di 2 funzioni derivabili).

Per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = 1 + 14x \sin \frac{1}{x} + 7x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$

$$= 1 + 14x \sin \frac{1}{x} \oplus 7 \cos \frac{1}{x}$$

segno - ! corretto dopo video

In ogni intervallo $(0, \delta)$ esistono punti, anzi intervalli, in cui $f'(x) > 0$ e intervalli in cui $f'(x) < 0$ (per colpa del termine $7 \cos \frac{1}{x}$)

Puoi scegliere δ piccolo

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 & \text{in } (0, \delta) \\ f'(x) &< 0 & \text{in } (-\delta, 0) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{monotonici} \\ 1 \end{array} \right\}$$

ma f non è monotona in nessun intervallo $(0, \delta) \cup (-\delta, 0)$

— o — o —

