

Teorema misterioso (Teorema di LAGRANGE) (MEAN VALUE THM.)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua in $[a, b]$,

(ii) f derivabile in (a, b) . [Se è deriv. in $[a, b]$ meglio]

Allora esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ tale che

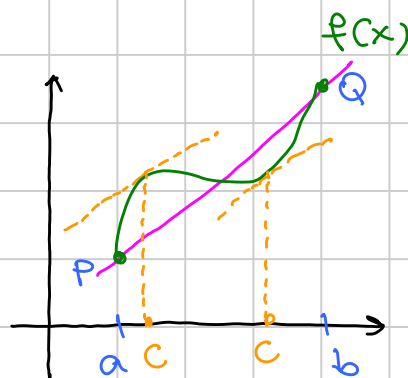
$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

Interpretazione geometrica Dividendo per $(b - a)$ la tesi diventa

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

"coeff. angolare della
retta PQ

"coeff. ang.
retta tangente
in c



Esiste almeno un p.to $c \in (a, b)$ in cui

la retta tangente è parallela alla retta PQ

Il p.to c può non essere unico (nella figura ce ne sono due).

Teoremi di monotonia = teoremi che legano segno della derivata e monotonia di una funzione.

MONOTONIA 1 (Segno della derivata in un p.to)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che $f'(x_0)$ esista e sia > 0 ,

Allora esiste $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tale che

$$f(x) < f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$$

(un po' prima vale meno)

$$f(x) > f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$$

(un po' dopo vale di più)

Achtung! Questo non vuol dire che f è crescente (anche solo deb.) in $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$.
(questo richiederebbe confrontare 2 p.ti qualunque di $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$)

Oss. Nei teoremi di monotonia se cambio $f' > 0$ con $f' < 0$ si cambia crescente con decrescente.

Dim. Per definizione

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

Per permanenza del segno si avrà che $\exists \delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \delta_0$) t.c.

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0 \quad \text{per ogni } h \in (-\delta_1, \delta_1) \setminus \{0\}$$

un po' a dx di x_0

Per $h > 0$, questo vuol dire $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$

Per $h < 0$, " " " $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$

un po' a sx di x_0

— 0 — 0 —

MONOTONIA 2 (segno della derivata in un intervallo)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che f sia derivabile in tutto l'intervallo.

Allora valgono le seguenti implicazioni.

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \Rightarrow f$ è deb. cresc. in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

(ii) $f'(x) > 0 \quad " \quad " \quad \Rightarrow f$ è strett. cresc. "

(iii) f è deb. cresc. in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ nell'intervallo

(iv) f è strett. cresc. " $\Rightarrow f'(x) > 0$ "

NO!

Se f è strett. cresc. nell'intervallo, posso dedurre solo che $f'(x) \geq 0$ nell'intervallo stesso

Esempio $f(x) = x^3$ è strett. cresc. in $(-3, 3)$, però
 $f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x = 0$.

Dim.: Siano $x_0 - \delta_0 < a < b < x_0 + \delta_0$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 generici

Per Lagrange

$$f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot f'(c)$$

↑
dipende da a e b

(i) So per certo che $f'(c) \geq 0$, da cui $f(b) - f(a) \geq 0$, cioè $f(b) \geq f(a)$

(ii) Stessa cosa, solo che so che $f'(c) > 0$, da cui $f(b) > f(a)$

(iii) Sia x un qualunque pto in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Per def.

$$f'(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$$

Per $R \geq 0$ ho che il rapp. increm. è ≥ 0 , e questa disug. si mantiene al limite.

Per $Q < 0$ si ha pure che rapp. increment. ≥ 0 , ma non sono strettamente.

— 0 — 0 —

Oss. Se f è stretta. cresc., è vero che

$$\frac{f(x+Q) - f(x)}{Q} > 0 \quad \text{per ogni } Q \text{ compatibile con } x$$

Però le DISUG. ~~stette~~ NON passano al limite.

— 0 — 0 —

MONOTONIA 3 (segno con annullamento sporadico)

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\delta_0 > 0$, sia $f: (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$

(ii) non esiste nessun intervallo $(a, b) \subseteq (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ tale

che $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Allora

f è strettamente crescente

$f'(x)$ si può annullare,
ma non su un
intero intervallo

Dim. Per monotonia 2 sappiamo che f è debolmente crescente.

Se per assurdo non fosse strett. cresc., esisterebbero a e b in $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ t.c. $a < b$ ma $f(a) = f(b)$.

Ma allora f dovrebbe essere costante in tutto $[a, b]$, ma allora $f'(x)$ dovrebbe annullarsi in tutto $[a, b]$.

