

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^2+2}$

Manca la condizione necessaria, quindi non converge.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$ a_n

Non converge assolutamente perché $|a_n| = a_n \sim \frac{1}{n}$

1° modo Leibnitz... resta da fare $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente.

$$\frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{(n+1)^3+2} \stackrel{?}{\leq} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$\frac{n^2+5n+5}{n^3+3n^2+3n+3} \stackrel{?}{\leq} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2}$$

$$(n^2+5n+5)(n^3+2) \stackrel{?}{\leq} (n^2+3n+1)(n^3+3n^2+3n+3)$$

$$\cancel{n^5} + 5n^4 + (\text{roba di grado } \leq 3) \stackrel{?}{\leq} \cancel{n^5} + 6n^4 + (\text{roba di grado } \leq 3)$$

$$n^4 \stackrel{?}{\geq} (\text{roba di grado } \leq 3)$$

Divido per n^4 e ritrovo

$$1 \stackrel{?}{\geq} \frac{\text{roba di grado } \leq 3}{n^4}$$

↓
quindi definitivamente sta sotto 1

2° modo Brutalmente $a_n \sim \frac{1}{n}$. Aggiungo e tolgo $\frac{1}{n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\dots}{\dots} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\dots}{\dots} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

converge assolutamente converge per Leibnitz

Vediamo l'altra

$$\frac{u^2+3u+1}{u^3+2} - \frac{1}{u} = \frac{\cancel{u^3}+3\cancel{u^2}+1-\cancel{u^3}-2}{u(u^3+2)} = \frac{3u^2+u-2}{u(u^3+2)}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+4}$

Sicuramente non converge. Che fa?

Aggiungo e tolgo 1 alla frazione:

$$\begin{aligned} \text{Serie data} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^2+4} - 1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-2}{n^2+4}}_{\text{converge assolutamente}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n}_{\text{indeterminata}} \end{aligned}$$

Convergente + indeterminata = indeterminata

In questo caso si dimostra che le somme parziali di indici pari / dispari hanno limiti diversi.

— 0 — 0 —

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ converge per il criterio del rapporto.
La somma di questa serie è e.

Nella giornata del numero e:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}} \quad (*)$$

Nell'ultima disug. ho usato che $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$

← somma parziale della serie data

$$\boxed{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k}} \leq \frac{1}{k!}$$

≤ 1

Passando al limite in (*) per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$e \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Serve disug. dalla parte opposta. Fisso un $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $n \geq m$ è vero che:

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$\downarrow$
 $\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$

Fissato k , si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! \cdot n^k} = \frac{1}{k!}$$

$\downarrow$
 1

Così ho dimostrato che $e \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$ qualunque sia m .

Facendo ora andare $m \rightarrow +\infty$ ottengo $e \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ che è la disuguaglianza richiesta.

Esempio 5 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ Converge per criterio del rapporto

La somma di questa è e^α . Per $\alpha \geq 0$ si dimostra come sopra partendo da:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\alpha^k}{n^k} \geq \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!}$$

$\downarrow$ e^α per limiti notevoli $\downarrow$ serie data

La disuguaglianza opposta si fa come prima.

Futuro: il risultato si dimostra agevolmente con la formula di Taylor con resto di Lagrange

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}$ con $\alpha > 0$

Fatto 1 Per $\alpha > 1$ converge in quanto

$$0 \leq \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \leq \frac{327}{n^\alpha} \quad \text{e concludo per confronto tra serie a termini } \geq 0$$

Fatto 2 Per $\alpha = 1$ diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan 1}{n}$, quindi diverge

Fatto 3 Quando $\alpha \in (0, 1)$

Brutal mode:

$$\frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha} \sim \frac{\alpha^n}{n^\alpha} \quad \text{quindi converge}$$

↑
 $\arctan x \sim x$
quando $x \rightarrow 0$

Ma la caso in due step.

Prima faccio C.A. con $b_n = \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{\alpha^n} = 1$$

↑
solito limite notevole

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi converge ad esempio per il criterio della radice.

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}} \stackrel{a_n}{=} \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$ quindi BOH

Faccio C.A. con $b_n = \frac{1}{n^3}$ e ottengo

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{2017}}{2^{\sqrt{n}}} = e^{2017 \log n - \sqrt{n} \log 2}$$

→ $e^{-\infty} = 0$
↑
radice terza Logaritmo

$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$... quindi definitivamente $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$... $a_n \leq b_n$...

Alternativa per il lim.

$$\frac{n^{2014}}{2^{\sqrt{n}}} = \frac{(\sqrt{n})^{4028}}{2^{\sqrt{n}}}$$