

Serie con termini di segno qualunque

① Criterio di LEIBNITZ

② Assoluta convergenza

Criterio di Leibnitz (serie a segno alterno)

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n.$$

Supponiamo che

(i) $d_n \geq 0$ definitivamente (cioè la serie è a segni alterni)(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ definitivamente(iii) $d_n \rightarrow 0$ (equivalente alla condiz. necess.)

Allora la serie converge.

Achtung! Se l'ipotesi (i) o (ii) non sono verificate, allora non si può dire nulla.

Se invece non è verificata la (iii), allora manca la cond. nec., quindi di sicuro non converge.

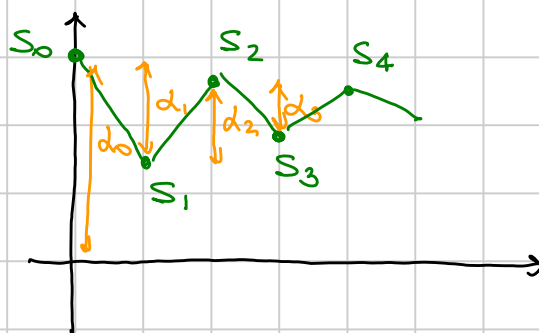
Idea: disegniamo le somme parziali S_n in rappresentazione cartesiana.

$$S_0 = d_0$$

$$S_1 = d_0 - d_1$$

$$S_2 = d_0 - d_1 + d_2$$

$$S_3 = d_0 - d_1 + d_2 - d_3$$

 $S_{2m} \nearrow$ mentre $S_{2m+1} \nearrow$

Dim. **Step 1**

$S_{2m+2} \leq S_{2m}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Infatti

$$S_{2m+2} = S_{2m} - \underbrace{\alpha_{2m+1} + \alpha_{2m+2}}_{\leq 0 \text{ per Hp (ii)}} \leq S_{2m}$$

Analogamente $S_{2m+3} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Step 2 $S_{2m} \geq S_{2m+1}$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$
(tutte le somme di indice pari sono maggiori di quelle di indice dispari)

Se $n \geq m$, allora $S_{2m+1} \overset{\text{Step 1}}{\leq} S_{2m+1} \overset{\substack{\uparrow \\ S_{2m+1} = S_{2n} - \alpha_{2m+1}}}{\leq} S_{2n}$

Se $n < m$, allora $S_{2n} \overset{\substack{\uparrow \\ \text{Step 1}}}{\geq} S_{2m} \overset{\substack{\uparrow \\ S_{2m+1} = S_{2m} - \alpha_{2m+1}}}{\geq} S_{2m+1}$

Step 3 $S_{2m} \geq S_1 = \alpha_0 - \alpha_1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$
 $S_{2m+1} \leq S_0 = \alpha_0$ per ogni $m \in \mathbb{N}$

Segue dallo Step 2 e dallo Step 1.

Step 4 Per il teorema delle successioni monotone

$$S_{2m} \rightarrow l_1 \in \mathbb{R} \quad S_{2m+1} \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$$

A priori sappiamo solo che $l_1 \geq l_2$. Ora

$$\begin{array}{ccc} S_{2m} - S_{2m+1} & = & \alpha_{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ l_1 - l_2 & = & 0 \end{array} \quad \downarrow \leftarrow \text{Hp (iii)}$$

Questo mostra che $l_1 = l_2 = S_\infty$

Step 5 Sapendo che $S_{2m} \rightarrow S_\infty$ e $S_{2m+1} \rightarrow S_\infty$ posso concludere che $S_m \rightarrow S_\infty$.

— o — o —

Lemma delle 2 sottosuccessioni Se una successione ha 2 sottosucc. che tendono allo stesso $l \in \bar{\mathbb{R}}$, e coprono tutti gli indici, allora tutta la successione tende allo stesso l .
 Lo stesso vale se ho k sottosuccessioni con lo stesso limite che coprono tutti gli indici.

Esercizio E se le sottosuccessioni fossero infinite?
 — o — o —

ASSOLUTA CONVERGENZA

Def. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se
 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Teorema Se una serie converge assolutamente, allora converge.
 Detto altrimenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Achtung! Non vale il viceversa, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$, per
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ restano aperte le 4 possibilità.

Due strategie dimostrative: $\rightarrow$ sfruttando l'ordinamento
 $\rightarrow$ sfruttando la completezza dei reali
 — o — o —

Lemma (criteri per serie) Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente. Supponiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ converge}$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. (Nessuna Hp di segno su a_n, b_n, c_n)

Dim. Step 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - a_n)}_{\geq 0}$ converge perché è differenza di due serie convergenti.

Step 2 $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - a_n)$ converge. Infatti

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$$

quindi da tesi segue dallo Step 1 per confronto tra serie a termini ≥ 0

Step 3 $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, quindi

$\sum b_n = \sum a_n + \sum (b_n - a_n)$ è somma di due serie convergenti.

— 0 — 0 —

Dim criterio assoluta convergenza

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

Le due serie laterali convergono per ipotesi, quindi converge quella centrale.

□
— 0 — 0 —

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{n}}_{d_n}$

Devo fare 3 verifiche:

(i) $d_n \geq 0$ gratis

(ii) $d_{n+1} \leq d_n$ cioè $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ gratis

(iii) $d_n \rightarrow 0$ gratis

Quindi la serie converge per Leibnitz

Non converge assolutamente perché $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Generalizzazione : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^a}$

(1) converge per Leibnitz se e solo se $a > 0$

(2) converge assolutamente se e solo se $a > 1$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$

$\frac{\cos(n!)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge quindi per confronto converge quella data.

No! Il confronto vale per serie a termini ≥ 0 , quindi qui non si può usare.

Passo attraverso l'assoluta convergenza : $0 \leq \frac{|\cos(n!)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n!)|}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2}$ conv.

(tabellina) $\uparrow$ confronto tra serie a termini ≥ 0 $\uparrow$ assoluta convergenza

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3 + n + 7}{n^5 - 3n^4 + 18} = d_n$

Se voglio usare Leibnitz devo dim. che $d_{n+1} \leq d_n$ definit.

In questo caso l'assoluta convergenza è molto più comoda:

$|(-1)^n d_n| = d_n \sim \frac{1}{n^2}$

$\uparrow$
almeno
definito.

— o — o —