

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n^5}{2^n}}_{a_n}$ converge $a_n \geq 0$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^5}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}}_{a_n}$

Radice: $\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ converge

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + n^2}{n!}$ converge (radice / rapporto)

Esempio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{n^3 - 200n^2 + 5}$

$a_n \geq 0$ definitivamente.

(num. e denom. sono definitivamente positivi perché $\rightarrow +\infty$)

Brutal mode: $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge (armonica con $a=1$)

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow 1 \neq 0, \neq +\infty$, quindi si comporta come $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow e$
 $\uparrow$
 tabellina

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, quindi diverge

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{7} - 1)$ $a_n \geq 0$ sempre

Brutal mode: $e^{\frac{1}{n} \log 7} - 1 \sim 1 + \frac{1}{n} \log 7 - 1 = \frac{1}{n} \log 7$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{7} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n} \log 7} - 1}{\frac{1}{n}} \rightarrow \log 7 \neq 0 \neq +\infty$$

Esempio 7 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^4}$

Intanto $a_n \geq 0$ definitivamente, anzi sempre, perché $0 < \frac{1}{n^4} \leq 1$ e $\sin x > 0$ per $x \in (0, 1)$

Brutal mode: $n^2 \sin \frac{1}{n^4} \sim n^2 \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ converge

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n^2}$... $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} \rightarrow 1$

Esempio 8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$

Brutal mode: $\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ TROPPO BRUTALE, DEVO ANDARE AVANTI!

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{3} \frac{1}{n^{3/2}} \leftarrow > 1 \Rightarrow \text{converge}$$

Rigoroso: C.A. con $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Mi riduco a fare

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \quad \text{che diventa} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

↑
Taylor

Oss. Il limite appena fatto ci dice anche che $a_n > 0$ definitivamente.
 Infatti, se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{3}$

allora definitivamente $\frac{a_n}{b_n} > 0$, ma essendo $b_n > 0$ lo sarà pure a_n .

Esempio 9 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n} \right)$

Brutal mode: $a_n \sim \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{6n^3} - \cancel{\frac{1}{n}} + \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{6n^3}$

Rigorosamente è equivalente a dire che

$\frac{a_n}{\frac{1}{n^3}} \rightarrow \frac{1}{6}$ da cui come prima $a_n > 0$ definitivamente e la serie converge.

Esempio 10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8 + n^5 - n^3}{n^{\alpha} + n^4 - 3\sqrt{n} + 8}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 3$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + 5}{n^8 + n^5 - 127}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 7$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n^3 + 5}{n^{\alpha} + n^5 + 7}$ converge per ogni α

(Provare a sistemare rigorosamente)

↓ sopra c'è n^3 , che è comunque sconfitto da n^5

$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sin \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 6$

$\sum \frac{n^{\alpha}}{\sin(n^2)}$ converge per ogni α

↑ contiene un e^{n^2} che sconfigge abbondantemente il numeratore

↳ step 1: C.A. con $\frac{n^{\alpha}}{e^{n^2}}$

↳ step 2: criterio della radice per

Esempio 11 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ $\frac{\log n}{n} \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge}$

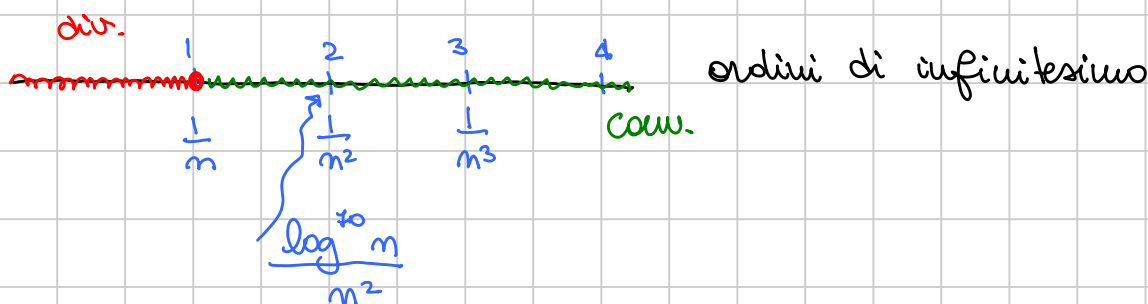
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$ $\frac{1}{n^2 \log n} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \text{converge}$

Esempio 12 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^a n}{n^2}$

C.A. con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ (o qualunque esponente in $(1, 2)$)

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log^a n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ caso limite

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \dots \Rightarrow a_n \leq b_n \dots \right] \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty$



Più in generale

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log^b n}{n^a}$ converge $\forall a > 1$ e per b qualunque

C.A. con $\frac{1}{n^{(1+a)/2}}$ ← intermedio tra 1 e a

Esempio 13 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^{\alpha}$

Brutal mode: $\sqrt[n]{n} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log n} - 1 \sim \frac{\log n}{n}$, quindi

$a_n \sim \frac{\log^{\alpha} n}{n^{\alpha}}$ quindi come sopra converge se e solo se $\alpha > 1$.

Esempio 14 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n + n^4}{n^7 + \alpha^n}$

Converge se e solo se $\alpha > 4$:
è come fosse $\frac{4^n}{\alpha^n} = \left(\frac{4}{\alpha}\right)^n$.

— o — o —