

FUNZIONI IPERBOLICHE

Def. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x && \text{(dispari)} \\ \cosh(-x) &= \cosh x && \text{(pari)} \\ \tanh(-x) &= -\tanh x && \text{(dispari)} \end{aligned}$$

Periodicità NON sono funzioni periodiche, anzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = -1$$

Derivate

$$\begin{aligned} (\sinh x)' &= \cosh x && (\cosh x)' = \sinh x \\ (\tanh x)' &= \text{esercizio} && \uparrow \\ &&& \text{senza il segno -} \end{aligned}$$

Taylor

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sinh x + \cosh x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dim. 1° modo $f(x) = \sinh x$, allora

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sinh x & k \text{ pari} \\ \cosh x & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 1 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi nel Taylor ci sono solo le potenze dispari con coeff. $\frac{1}{k!}$

2° modo

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

i pari se li vanno per colpa di

Esercizio: fare lo stesso per $\cosh x$.

Quadrati

$$\sinh^2 x = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} - 2)$$

↑ doppio prodotto

$$\cosh^2 x = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x} + 2)$$

da cui

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Relazione fondamentale della trigonometria iperbolica

Duplicazione

$$\sinh(2x) = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x})$$

$$= 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

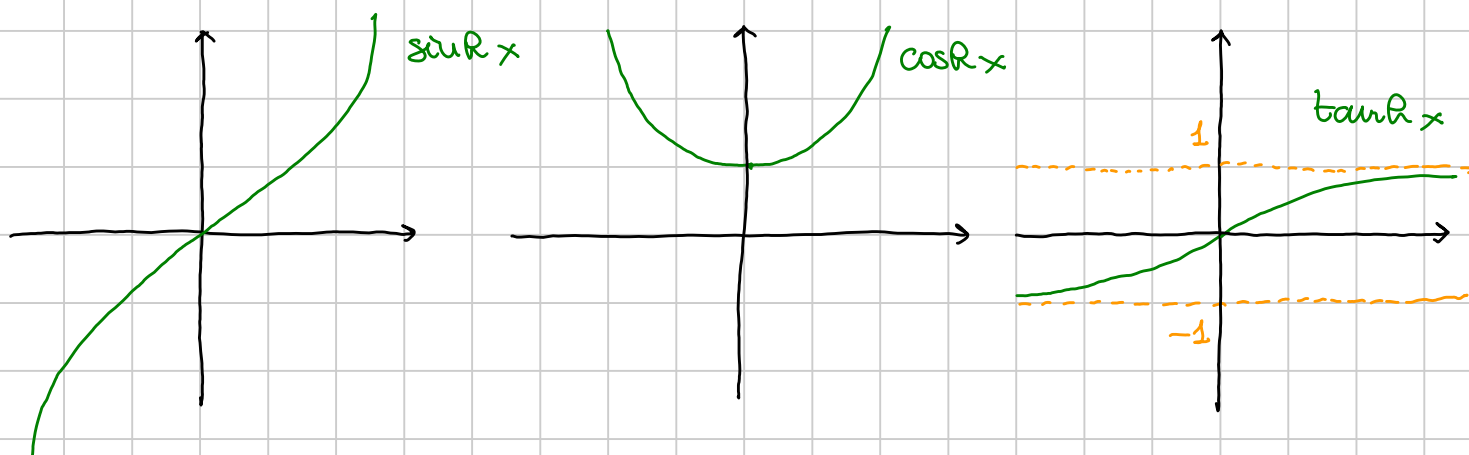
$$= 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Ok!

Esercizio: trovare la formula per $\cos(2x)$ e scriverla nei tre modi usuali, confrontandola con

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Monotonia e grafici I grafici sono i seguenti



Dimostriamo che $\sinh x$ è monotona crescente: somma di 2 funzioni strett. crescenti (e^x e $-e^{-x}$).

Dim. che $\cosh x$ è strett. cresc. in $[0, +\infty)$: prendo $y > x$ e spero che $\cosh y > \cosh x$, cioè

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} > \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Pongo $e^y = b$, $e^x = a$ e mi riduco a dimostrare che

$$b > a \Rightarrow b + \frac{1}{b} > a + \frac{1}{a}$$

$$b - a + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = (b - a) + \frac{a - b}{ab} = (b - a) \left(1 - \frac{1}{ab}\right)$$

$$= \frac{(b - a)(ab - 1)}{ab} > 0 \text{ perché } b > a \geq 1, \text{ quindi } ab > 1$$

quindi se $b - a > 0$ l'espressione è positiva.

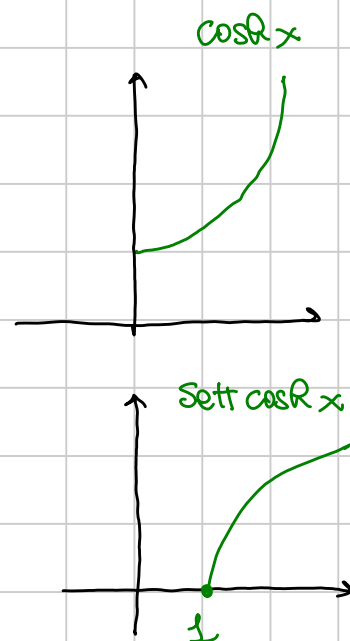
Funzioni inverse

$\sinh x$ È bigettiva come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, quindi ammette l'inversa $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ detta
$$g(x) = \text{Sett} \sinh x$$

$\cosh x$ Vista come $f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ è invertibile.
La sua inversa
$$g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

è detta

$$g(x) = \text{Sett} \cosh x$$



Le derivate sono $(\text{Sett} \sinh x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$(\text{Sett} \cosh x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

controllare per esercizio

Formule esplicite per le funzioni inverse

Facciamo il caso di $\cosh x$. Per trovare $\text{Sett} \cosh x$ devo risolvere

$$\cosh x = x \quad (\text{cioè trovare } x)$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = x, \quad \text{cioè} \quad e^x + e^{-x} = 2x$$

Pongo $e^x = b$ e l'eq. diventa $b + \frac{1}{b} = 2x$, cioè

$$b^2 - 2xb + 1 = 0, \quad \text{da cui} \quad b = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

Ora mi serve che sia $b > 0$ per poter risolvere $e^x = b$. Si vede abbastanza facilmente che questo succede solo se $x \geq 1$ (per $x \leq -1$ le soluzioni sono negative).

A questo punto devo risolvere

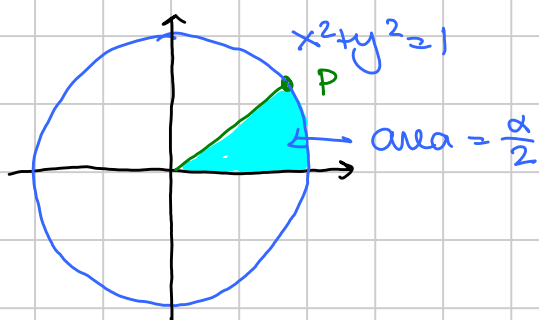
$$e^{\alpha} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \text{ cioè } \alpha = \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Quella buona è quella che mi fornisce $\alpha \geq 0$, quindi l'arg. del log deve essere ≥ 1 e questo accade se e solo se prendo quella con il +. Conclusione

$$\text{Sett } \cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

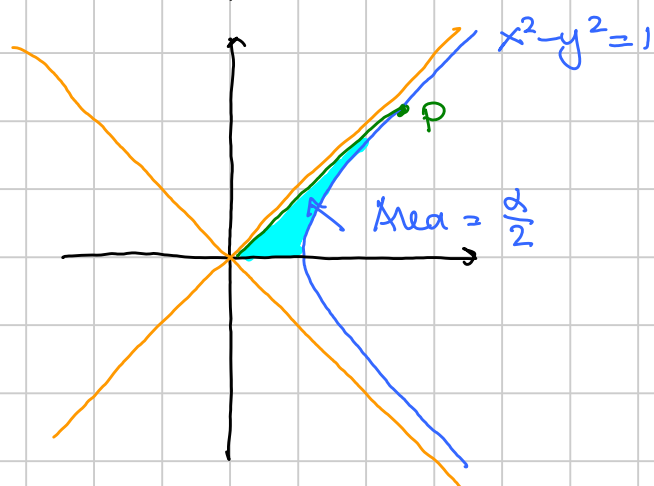
Oss. Le 2 soluzioni in α sono l'una = l'altra cambiata di segno. Si vede dalla formula?
— o — o —

Interpretazione geometrica



Quando $\text{Area} = \frac{\alpha}{2}$, allora

$$P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$$



Fatto misterioso: per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste un unico p.to P sull'iperbole che individua un settore di $\text{area} = \frac{\alpha}{2}$ (interpretata con segno).

Le coord. di $P = (\cosh \alpha, \sinh \alpha)$

Oss. Il giorno in cui i complessi saranno noti, ci saranno le formule

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$