

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO QUALUNQUE

Data $f(x)$, dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico polinomio P_n , di grado $\leq n$, tale che

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

La formula per P_n è la solita, quindi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Scrittura alternativa: ponendo $x-x_0 = h$ si ottiene

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Sotto quali ipotesi vale? Condizione suff. è che

- $\exists \delta > 0$ t.c. f è definita almeno in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile almeno $(n-1)$ volte in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,
- f è derivabile n volte almeno in x_0 .

Dim.:

Pongo $g(h) := f(x_0+h)$. Ora g è definita almeno in $(-\delta, \delta)$. Le derivate di g sono legate a quelle di f da $f^{(k)}(x_0+h) = g^{(k)}(h)$, da cui $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(0)$. Scrivendo Taylor per $g(h)$ si ottiene Taylor per $f(x)$ con centro in x_0 . $\square$

Operazioni con i polinomi di Taylor Per semplicità $x_0 = 0$

Somma di funzioni Se $f(x) = P_m(x) + o(x^n)$
 $g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$

allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + o(x^n)$$

[Dici.: $f(x) = P_m(x) + x^n \omega_1(x)$, $g(x) = Q_n(x) + x^n \omega_2(x)$
Allora

$$f(x) \pm g(x) = P_m(x) \pm Q_n(x) + x^n \underbrace{[\omega_1(x) \pm \omega_2(x)]}_{\omega_3(x)} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{o(x^n)}$$

Prodotto per una costante $\alpha f(x) = \alpha P_m(x) + o(x^n)$

Prodotto di due funzioni $f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$

[Dici.: $f(x) \cdot g(x) = P_m(x) \cdot Q_n(x) +$
 $+ x^n \{ P_m(x) \omega_2(x) + Q_n(x) \omega_1(x) + \omega_1(x) \omega_2(x) x^n \}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega_3(x) \rightarrow 0}$
Tutto ciò è $o(x^n)$.]

Oss. Nel calcolare $P_m(x) \cdot Q_n(x)$ posso limitarmi ai termini di grado $\leq n$. Gli altri sono "mangiati" da $o(x^n)$

Esempio 1 $\cos x \cdot \sin x$ $n = 4$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{x^4}{24}} + o(x^4) \right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right) =$$

$\cos x$ $\sin x$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + o(x^4) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).$$

pensando che nell'altro termine c'è almeno x posso risparmiarlo

Composizione

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n)$$

Primo caso semplice

$$f(\alpha x) = P_m(\alpha x) + o(x^n)$$

Secondo caso semplice

$$f(x^\alpha) = P_m(x^\alpha) + o(x^{n\alpha}) \quad \text{per } \alpha > 0$$

Dim.: $f(x^\alpha) = P_m(x^\alpha) + x^{n\alpha} \underbrace{\omega(x^\alpha)}_{\omega_3(x)} \rightarrow 0$

↑ se $\alpha \in \mathbb{N}$ ottengo ancora un pol., altrimenti è comunque corretto perché $\alpha > 0$

corretto dopo video

Caso generale

$$f(x) = P_m(x) + o(x^n) = P_m(x) + x^n \omega_1(x)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + x^n \omega_2(x)$$

$$f(g(x)) = P_m(Q_n(x)) + o(x^n)$$

PERCHÉ $Q_n(0) = 0$
cioè $g(0) = 0$

Dim.: $f(g(x)) = P_m(g(x)) + [g(x)]^n \omega_1([g(x)]^n)$

$$= P_m(Q_n(x) + x^n \omega_2(x)) + [Q_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n \omega_1(\dots)$$

Fatto 1 $P_n(Q_n(x) + x^n \omega_2(x)) = P_n(Q_n(x)) + o(x^n)$

Questo è vero monomio per monomio

$$(Q_n(x) + x^n \omega_2(x))^k = [Q_n(x)]^k + \underbrace{\text{tutti termini con almeno } x^n}_{o(x^n)} \quad \text{e } \omega_2(x) \uparrow$$

Fatto 2 $\underbrace{[Q_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n}_{\text{qui posso raccogliere } x} \omega_1(g(x)) \stackrel{?}{=} x^n \cdot \omega_3(x)$

↓ qui posso raccogliere x
perché $Q_n(0) = 0$

$$[x R_n(x) + x^n \omega_2(x)]^n \omega_1(g(x)) =$$

$$x^n \underbrace{[R_n(x) + x^{n-1} \omega_2(x)]^n}_{\omega_3(x)} \underbrace{\omega_1(g(x))}_{\omega_3(x)}$$

poiché $g(x) \rightarrow 0$
posso porre $y = g(x)$
e dedurre che va a 0.

Esempio 1 $\cos(\sin x)$ Sviluppo con $n=4$

$$\cos t = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + o(t^4) \quad \text{poi pongo } t = \sin x$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x + \frac{1}{24} \sin^4 x + \underbrace{o(\sin^4 x)}_{o(x^4)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{x^4}{3} \right) + \frac{1}{24} x^4 + o(x^4)$$

↑
doppio prodotto

$$= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \underbrace{o(x^5)}$$

↑ avrei $o(x^4)$, ma sapendo che la funzione è pari sono sicuro che il termine con x^5 ha coeff. 0.

Esempio 2 $\sin(\cos x)$ $n=4$

$$\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^4)$$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos^3 x + \underbrace{o(\cos^4 x)}_{o(x^4)}$$

NO! Perché non è verificata l'ipotesi $g(x) \rightarrow 0$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6} \cos^3 x + \cos^4 x \omega(\cos x)$$

↑
non posso
moltip. e dividere
per x^4

↑ non tende a 0,
quindi di ω non so
nulla

Oss. Lo sviluppo classico di $\sin x$ vale quando $x \rightarrow 0$,
quindi se l'argomento tende ad 1 non posso dire nulla.
— 0 — 0 —