

SVILUPPI DI TAYLOR

Data una funzione $f(x)$ e dato $n \in \mathbb{N}$, si vorrebbe trovare un polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Formula di TAYLOR con resto di PEANO

resto

Se approssiamo $f(x)$ con $P_n(x)$ commetto un errore $f(x) - P_n(x)$ che è "piccolo" nel senso che è $o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$.

Lemma Supponiamo che esista un $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra.

Allora $P_n(x)$ è unico.

Dim.: Supponiamo che ce ne siano 2 che vanno bene, diciamo $P_n(x)$ e $Q_n(x)$, allora

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) = Q_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

da cui $\underline{P_n(x) - Q_n(x)} = o(x^n)$
polinomio di grado $\leq n$

Dato un polinomio $P(x)$ di grado $\leq n$, allora

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x^n} = 0 \quad \text{se e solo se } P(x) \text{ è il polinomio nullo}$$

(esercizio: si tratta di raccogliere in $P(x)$ la potenza di x più bassa e osservare che c'è più esponente al denominatore). $\square$

Teorema misterioso Sia $f(x)$ una funzione definita per lo meno in un intervallo $(-\delta, \delta)$ per un qualche $\delta > 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che

- le derivate di f fino alla $(n-1)$ -esima esistono in $(-\delta, \delta)$
- la derivata n -esima di f esiste almeno in 0

Allora esiste un (unico) polinomio $P_n(x)$ per cui vale la formula di sopra ed è dato dalla seguente formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

derivata n -esima
di $f(x)$ in $x=0$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Oss. 1 Le ipotesi del teorema sono condizioni SUFFICIENTI per l'esistenza del polinomio $P_n(x)$.

Ci sono esempi di funzioni $f(x)$ che non sono nemmeno derivabili che però ammettono polinomi $P_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Oss. 2 I polinomi $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, ... si ottengono l'uno dal precedente aggiungendo un termine.

La formula di Taylor con resto di Peano, nelle ipotesi del teo. mist., si scrive come

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

Sviluppi di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

se voglio il polinomio $P_n(x)$ mi fermo al termine con x^n

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$
 $\binom{\alpha}{1} \qquad \binom{\alpha}{2} \qquad \binom{\alpha}{3}$

sono come i binomiali, ma α non è detto che sia in $\mathbb{N}$.

Oss. Le funzioni pari hanno solo potenze pari nello sviluppo
" " dispari " " " " " " " " " " " "

[Si dimostra partendo dal fatto che la derivata di una funzione pari è dispari e viceversa, e le funzioni dispari in 0 fanno 0]

Oss. Casi particolari di $(1+x)^\alpha$.

$$\boxed{\alpha = -1} \quad \binom{\alpha}{1} = -1 \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1 \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$$

e per induzione $\binom{\alpha}{k} = (-1)^k$, da cui

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

— 0 — 0 —

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + x^5}{x^3} =$ (uso $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = -\frac{1}{6}$$

— 0 — 0 —

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^3) \quad P_3(x)$$

VERA (Taylor con $n=3$)

$$\sin x = \boxed{x - \frac{x^3}{6}} + o(x^4) \quad P_4(x)$$

VERA (Taylor con $n=4$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

FALSA (manca $\frac{x^5}{120}$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2)$$

VERA ma poco FORBA
perché $o(x^2)$ mangia $-\frac{x^3}{6}$

$$\sin x = x - 327x^3 + o(x^2)$$

VERA per lo stesso
motivo

— 0 — 0 —

Giustificazione degli sviluppi di Taylor

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

quindi

Allora $f^{(k)}(x) = e^x$, quindi $f^{(k)}(0) = 1$ per ogni k

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

$f(x) = \sin x$ Allora $f^{(0)}(x) = \sin x = f^{(4)}(x) = f^{(8)}(x) = \dots$
 $f^{(1)}(x) = \cos x = f^{(5)}(x) = f^{(9)}(x) = \dots$
 $f^{(2)}(x) = -\sin x = f^{(6)}(x) = \dots$
 $f^{(3)}(x) = -\cos x = \dots$

Quando sostituisco $x=0$ ottengo

$$0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

Dividendo per $k!$ trovo i coeff. $\frac{1}{1!}, -\frac{1}{3!}, \frac{1}{5!}, -\frac{1}{7!}, \dots$

$f(x) = \cos x$ Più o meno la stessa cosa

$f(x) = \log(1+x)$ $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$
 $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} \dots$

In generale $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ Si dimostra facilmente per induzione

Da qui calcolo il coeff. di x^k nello sviluppo di $\log(1+x)$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{1} \cdot \frac{1}{k!} = (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

$$= 1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Esercizio Giustificare lo sviluppo di $(1+x)^a$.
 Provare con archtan $x \dots$