

# ANALISI 1 - LEZIONE 025

Titolo nota

23/10/2014

## Derivate delle funzioni elementari

$$(x^n)' = n x^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\text{costante})' = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

## Teoremi algebrici sulle derivate

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' \quad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

## Derivata di $\log x$

Rapp. increment.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \frac{x_0+h}{x_0}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}$$

$$\frac{\log \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}$$

pongo  $y = \frac{h}{x_0}$

$$= \frac{1}{x_0}$$

Diff.

$$\log(x_0+h) = \log \frac{x_0+h}{x_0} + \log x_0$$

$$= \log \left(1 + \frac{h}{x_0}\right) + \log x_0 = \text{sviluppiamo} \dots$$

Derivata della somma Siano  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sia  $x_0 \in D$  un p.to interno.

Supponiamo  $f(x)$  derivabile in  $x_0$  e  $g(x)$  derivabile in  $x_0$ .

Allora la funzione  $s(x) = f(x) + g(x)$  è derivabile in  $x_0$  e

$$s'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim. via rapporto increment.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(x_0+h) - s(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

Dim. via differenziale

$$\begin{aligned} s(x_0+h) &= f(x_0+h) + g(x_0+h) \quad (\text{uso ipotesi}) \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) + g(x_0) + g'(x_0) \cdot h + o(h) \\ &= s(x_0) + \underbrace{[f'(x_0) + g'(x_0)]}_{s'(x_0)} h + o(h) \end{aligned}$$

— o — o —

Derivata del prodotto ... enunciato ...  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$  ...

Dim. via rapp. increment.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

(aggiungo e tolgo un termine misto qualunque)

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0+h) + f(x_0)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \underbrace{g(x_0+h)}_{\substack{\downarrow \\ g(x_0) \\ \uparrow \text{anch'ebbe dimostrato}}} \cdot \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow f'(x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{\downarrow f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow g'(x_0)} \right] \end{aligned}$$

$$g(x_0+h) = \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot \boxed{h} + \boxed{g(x_0)} \rightarrow g(x_0)$$

$\downarrow$   $\downarrow$   $\downarrow$   
 $g'(x_0)$   $0$   $g(x_0)$

Oss. La riga precedente dimostra che  $g$  derivabile in  $x_0 \Rightarrow g$  continua in  $x_0$

(nota bene:  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x_0+h) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ )

Dim. via differenziale

$$f(x_0+h)g(x_0+h) = [f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)] \cdot [g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)]$$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) + [f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)]h + o(h)$$

$f(x_0)$   
 $\propto h$   
 $+ o(h)$

$\uparrow$  provare a scrivere i 6 termini rimanenti e vedere che sono davvero o piccolo  
 $\sim o \sim o \sim$

Derivata di  $\frac{1}{f}$  ... Enunciato ... Supponiamo  $f(x_0) \neq 0$  ...

...  $q(x) = \frac{1}{f(x)}$  ...  $q'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

Dim. via rapp. incrim.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{q(x_0+h) - q(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0) - f(x_0+h)}{f(x_0+h) \cdot f(x_0)}}{h} = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

$\downarrow$   
 $f(x_0)$

Oss. Quando si definisce  $\frac{1}{f(x)}$  ci vogliono cautele per essere sicuri che  $f(x) \neq 0$  almeno vicino ad  $x_0$  (per il seguo).

Derivata di  $\frac{f}{g}$ : segue scrivendo  $f \cdot \frac{1}{g}$  e facendo la derivata del prodotto,

Derivata della composizione: teorema misterioso

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$\downarrow$  pongo  $y = g(x_0+h) - g(x_0)$        $\downarrow$   $g'(x_0)$

$$\frac{f(g(x_0)+y) - f(g(x_0))}{y}$$

$\downarrow$   $f'(g(x_0))$

Achtung! Non è una dim. completa perché potrei aver moltiplicato e diviso per 0.

Derivata di  $x^n$ : si fa per induzione sfruttando la derivata del prodotto

Derivata di  $a^x$ :  $a^x = e^{x \log a}$  e uso la composizione

$$(a^x)' = (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot \log a$$

$\log a$   
derivata esponente

$$= a^x \cdot \log a$$

Derivata di  $x^\alpha$        $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$\frac{\alpha}{x}$   
derivata esponente

$$= x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Teorema misterioso Sia  $g(x)$  la funzione inversa di  $f(x)$  (supposto che esista).

Supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , e sia  $y_0 = f(x_0)$ . Allora  $g$  è derivabile in  $y_0$  e

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Dim. abusiva  $g(f(x)) = x$  per def. di inversa.  
Derivo a dx e so e ottengo

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Quindi  $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ . Metto  $x = x_0$  e ho la tesi.  $\square$

Oss. L'abusivismo è supporre che  $g$  sia derivabile.

Esempio 1  $f(x) = e^x$   $g(x) = \log x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

Esempio 2  $f(x) = \tan x$   $g(x) = \arctan x$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \quad (\text{si fa usando il rapporto } \frac{\sin x}{\cos x})$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Occhio alla possibilità di "semplificare"  $\tan$  e  $\arctan$ .

[Esercizio] Fare la stessa cosa per  $\arcsin x$  e  $\arccos x$ .  
— o — o —