

DERIVATA E DIFFERENZIALE

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$$

Prerequisito: x_0 è un punto interno a D , cioè $\exists \delta > 0$ t.c.

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq D.$$

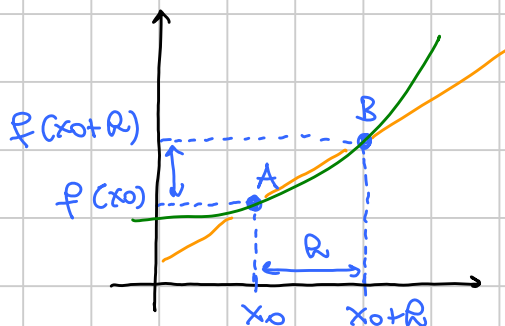
Def. (Rapporto incrementale). È la funzione

$$R \rightarrow \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R}$$

← con. incremento della y
← incremento della x quando
passo da x_0 a $x_0 + R$

definita almeno per $R \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$

Geometricamente, il rapporto incrementale è il coeff. angolare della retta AB



Def. (Derivata in x_0) Si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0 se esiste finito (cioè reale) il

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + R) - f(x_0)}{R}$$

Tale limite si indica con una di queste notazioni

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad \dot{f}(x_0)$$

e si chiama derivata di $f(x)$ in x_0

Def. Una funzione si dice derivabile in D se ogni p.to di D è interno a D ed il limite esiste per ogni $x_0 \in D$. In tal caso si indica con $f'(x)$ (o $\dot{f}(x)$) la funzione derivata.

Intuitivamente, quando $h \rightarrow 0$ il p.to B tende al p.to A e la retta AB tende alla retta tangente al grafico in A. Quindi $f'(x_0)$ rappresenta il coeff. ang. della retta tang. al grafico in A, che quindi ha equazione

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Def. (Differenziale) Si dice che $f(x)$ è differenziabile in x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha R + o(R) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Si dice differenziale di f in x_0 l'applicazione lineare $R \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema f derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ differenziabile in x_0

Detto meglio:

- Se f è derivabile in x_0 , allora f è diff. in x_0 e l'unico α che va bene è $f'(x_0)$
- Se f è diff. in x_0 , allora c'è un unico α che va bene e inoltre f risulta derivabile in x_0 con $f'(x_0) = \alpha$.

Lemma (unicità del diff.) Se f è diff. in x_0 , allora c'è un unico α che va bene.

Dim. Supponiamo verifichi la def. con α_1 e α_2 . Allora

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \alpha_1 R + o(R) = f(x_0) + \alpha_2 R + o(R) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

Ma allora $(d_1 - d_2)R = o(R)$, il che equivale a dire che

$$(d_1 - d_2) \cancel{R} = \cancel{R} \cdot \omega(\cancel{R})$$

Quindi $\alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

Dim. $[f \text{ deriv.} \Rightarrow f \text{ diff.}]$ Dimostro che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

Con la def. quasi equiv. questo diventa verificare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

$\downarrow$
 $f'(x_0)$

$[f \text{ diff.} \Rightarrow f \text{ deriv. e } f'(x_0) = \alpha]$ Per ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

Ma allora $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \alpha + \frac{o(h)}{h} = \alpha$

$\uparrow$
 0

Quindi esiste $f'(x_0)$ e vale proprio α . $\square$

Oss. Riscrivo la def. di diff. cambiando variabile (pongo $x_0+h = x$)

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$$

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

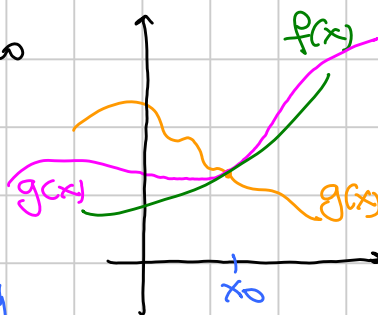
equazione della retta che
passa per $(x_0, f(x_0))$ con coeff. ang. α

Def. Diciamo che i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ si toccano in x_0 se $f(x_0) = g(x_0)$ (contatto di ordine 0)

Diciamo che il contatto è di ordine ≥ 1

se

$$f(x) - g(x) = o(x-x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$



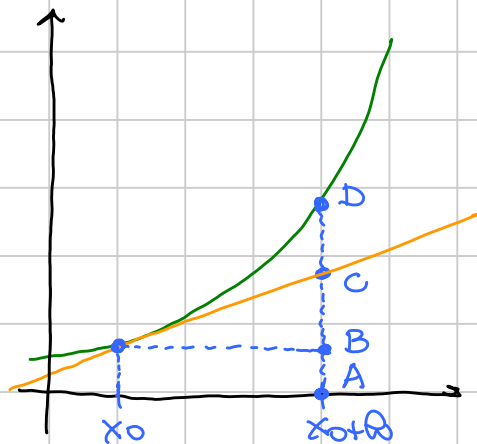
Def. intrinseca di retta tangente La retta tangente al grafico in un p.to è la retta che ha in quel p.to un contatto di ordine ≥ 1 con il grafico della funzione.

Oss. Quello che abbiamo dim. è che tale retta, posto che esista, è unica ed è quella che ha come coeff ang. $f'(x_0)$

Interpretazione geometrica

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 AD AB BC CD



Quando $h \rightarrow 0$

- AB resta costante
- $BC \rightarrow 0$ linearmente in h
- $CD \rightarrow 0$ più velocemente di h e questo è $o(h)$.

Derivate di funzioni elementari $D = \mathbb{R}$

Esempio 1 $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0
 \end{aligned}$$

In versione differenziale:

$$\underbrace{(x_0+h)^2}_{f(x_0+h)} = \underbrace{x_0^2}_{f(x_0)} + \underbrace{2x_0h}_{f'(x_0)h} + \underbrace{h^2}_{o(h)}$$

Esempio 2 $f(x) = e^x$

Rapp. increment.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$

Diff.: $e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = e^{x_0} (1 + h + o(h))$

$$= e^{x_0} + e^{x_0} h + o(h)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0) h + o(h)$$

Esempio 3 $f(x) = \sin x$

Rapp. increment.: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x_0 \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} = \cos x_0$$

Diff.: $\sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$

$$= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h))$$
$$= \sin x_0 + \cos x_0 h + o(h)$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) h + o(h)$$

Conclusione I tre concetti

- limiti notevoli con le funzioni elementari
- derivate delle funzioni elementari
- sviluppi

sono tre facce della stessa medaglia.