

Esercizio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} + \log(1 + \arctan(3x)) + \sqrt{1+2x} - 2\cos x^2}{\arcsin(5x) + \tan(e^{2x}-1)} = \frac{4}{7}$$

Divido sopra e sotto per  $x$

$$\begin{array}{c} \circ \leftarrow \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x} + \frac{\log(1 + \arctan(3x))}{x} + \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} + 2 \frac{1 - \cos x^2}{x} \\ \hline \frac{\arctan(5x)}{x} + \frac{\tan(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} \frac{e^{2x}-1}{x} \end{array}$$

$\downarrow 5 \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 2$

$$\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot x \rightarrow 0$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 1 \quad \downarrow 0$

$$\frac{\log(1 + \arctan(3x))}{\arctan(3x)} \cdot \frac{\arctan(3x)}{x} \rightarrow 3$$

$\downarrow 1 \quad \downarrow 3$

$$\frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{+1}} = \frac{\cancel{1+2x} - 1}{\cancel{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x} + 1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

## SVILUPPINI

Tutti gli o piccolo si intendono per  $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$  (comprende anche le radici  $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ )  
e anche gli  $\alpha$  negativi

Quando scrivo  $\sin x = x + o(x)$  vuol dire che  $\sin x - x = o(x)$

Dim. Uso def. quasi equiv. e mi riduco a verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Analogamente si dimostrano gli altri della 1ª colonna,

$e^x = 1 + x + o(x)$  vuol dire che  $e^x - 1 - x = o(x)$

Dim.: mi riduco a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

Verifica dei 2 con  $\cos x$ :

$\cos x = 1 + o(x)$  vuol dire che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Dim. mi riduco a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\cos x - 1}{x^2} + \frac{1}{2} \right] = 0.$$

Quello con  $\alpha$  si ottiene

→ dal binomio di Newton quando  $\alpha \in \mathbb{N}$

→ dalla razionalizzazione quando  $\alpha = \frac{1}{k}$  con  $k$  intero  $\geq 2$

→ da Taylor in generale per  $\alpha$  generico.

— o — o —

La tabellina degli sviluppi si può interpretare in termini di equivalenza asintotica

$$\sin x \sim x$$

$$\tan x \sim x$$

$$\arctan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\log(1+x) \sim x$$

$$\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

Meglio dimenticarla  
quando si fanno  
i limiti

[Dim. Se divido  $\frac{\text{LHS}}{\text{RHS}} \rightarrow 1$  per  $x \rightarrow 0$ ]

Esempio 1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{\arcsin x + \tan x} = \frac{1}{2}$

Sostituisco ad ogni funzione il suo sviluppo

$$\frac{\overbrace{1+x+o(x)}^{e^x} - \overbrace{(1+o(x))}^{\cos x}}{\underbrace{x+o(x)}_{\arcsin x} + \underbrace{x+o(x)}_{\tan x}} = \frac{x+o(x)}{2x+o(x)} = \frac{1 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}}{2 + \boxed{\frac{o(x)}{x}}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Sostituendo tutto:  $\sin x = x + o(x) \rightsquigarrow \sin x = x + x w_1(x)$   
 $e^x = 1 + x + o(x) \rightsquigarrow e^x = 1 + x + x w_2(x)$

...

$$\text{Frazione data} = \frac{x + x(w_1(x) + w_2(x))}{2x + x(w_3(x) + w_4(x))} = \frac{1 + \boxed{w_1(x) + w_2(x)}}{2 + \boxed{w_3(x) + w_4(x)}}$$

Esempio 2  $\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3}{2}$

$$\sin x = x + o(x) \leadsto \sin(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x) \leadsto \log(1+2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

$$\frac{\sin(3x)}{\log(1+2x)} = \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{3 + \frac{o(x)}{x}}{2 + \frac{o(x)}{x}} \rightarrow \frac{3}{2}$$

$\nearrow 0$   
 $\downarrow 0$

Esempio 3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) + \tan^2(3x)}{2x + e^{5x} - 1} = \frac{2}{7}$

$$\sin(2x) = 2x + o(2x) = 2x + o(x)$$

$$\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$$

$$[\tan(3x)]^2 = [3x + o(x)]^2 = 9x^2 + 6x \cdot o(x) + o(x)^2 = o(x)$$

$$\begin{aligned}
 &= 9x^2 + 6x \cdot x \omega(x) + x^2 \omega^2(x) \\
 &= x \underbrace{(9x + 6x \omega(x) + x \omega^2(x))}_{\omega_1(x) \rightarrow 0}
 \end{aligned}$$

$$e^{5x} = 1 + 5x + o(x)$$

$$\text{Frazione} = \frac{2x + o(x)}{2x + \cancel{1} + 5x - \cancel{1} + o(x)} = \frac{2x + o(x)}{7x + o(x)} \rightarrow \frac{2}{7}$$

Esempio 3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(3x)} - 1}{\log(1 + \tan(5x))} = \frac{3}{5}$

$$\text{Num} = 3x + o(x)$$

$$\text{Denom} = 5x + o(x)$$

La giustificazione è il discorso delle composizioni dell'ora prec.

$$e^x = 1 + x + \boxed{o(x)} \xrightarrow{\quad} x \omega(x)$$

$$e^{\sin(3x)} = 1 + \underbrace{\sin(3x)}_{3x + o(x)} + \boxed{o(\sin(3x))} = 1 + 3x + o(x)$$

$$\sin(3x) \omega(\sin(3x))$$

$$= x \cdot \underbrace{\frac{\sin(3x)}{x}}_3 \underbrace{\omega(\sin(3x))}_0$$

$$= x \cdot \text{q.c. che va a } 0$$

— 0 — 0 —

$x^2$  e ue ue  
↑ frego

$3x$   
↑

$$2x \cdot \frac{1}{2} = x$$

quadrato...

$$\frac{e^{\sin^2 x} + \log(1 + \arctan(3x)) + \sqrt{1+2x} - 2\cos(x^2)}{\arcsin(5x) + \tan(e^{2x}-1)} = \frac{4x}{7x} \rightarrow \frac{4}{7}$$

$\downarrow$   $5x$                        $\downarrow$   $2x$

— 0 — 0 —