

# ANALISI 1 - LEZIONE 019

Titolo nota

16/10/2014

Criterio funzioni  $\rightarrow$  successioni (come dedurre limiti di successioni da limiti di funzioni)

Esempio  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

Pongo  $x = \frac{1}{n}$ . Quando  $n \rightarrow +\infty$  ho che  $x \rightarrow 0$ , quindi div.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Teorema Sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Sia  $a_n$  una succ.  
Supponiamo che

(1)  $\bullet a_n \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

(2)  $\bullet \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$

(3)  $\bullet a_n \in D \setminus \{x_0\}$  definitivamente

Allora  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$  (stesso  $l$  di sopra)

Dim. in un caso  $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$

Devo dim. che  $\forall \varepsilon > 0 \quad |f(a_n) - l| \leq \varepsilon$  definitivamente.

Per ipotesi (2) dato  $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (D \setminus \{x_0\}) \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

Per ipotesi (1) e (3) abbiamo che  $a_n \in \overbrace{(D \setminus \{x_0\})}^{(3)} \cap \overbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta]}^{(1)}$  definitivamente.

Quindi definitivamente  $|f(a_n) - l| \leq \varepsilon$ .

— o — o —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

Base ed esponente strano?  $e^{\text{ALLA}}$  !!!

Scrivo  $f(x)^{g(x)}$  come  $e^{g(x) \log f(x)}$

In questo caso  $a^x = e^{x \log a}$ , quindi

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x} = \frac{e^{x \log a} - 1}{x \log a} \cdot \log a \rightarrow \log a$$

$\downarrow y = x \log a$   
1

Esempio 1  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{7} - 1)$  [ $+\infty \cdot 0$ ]

$$n(\sqrt[n]{7} - 1) = \frac{7^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Quindi per funzioni  $\rightarrow$  succ.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{7} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x} = \log 7$$

Esempio 2  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1)$

$$n(\sqrt[n]{n} - 1) = \frac{n^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{\log n}{n}} - 1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \log n$$

$\downarrow$   
1

$\log n \rightarrow +\infty$

Ho posto  $x = \frac{\log n}{n}$  e osservo che quando  $n \rightarrow +\infty$  ho che  $x \rightarrow 0$

perché il logaritmo perde dalle potenze. Detto meglio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{ey} = 0$$

$\uparrow y = \log x$

Esempio 3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 3x}{\arcsin(7x)} = \frac{0}{0} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{e^{2x} - \cos(3x)}{\arcsin(7x)} = \frac{e^{2x} - 1 + 1 - \cos(3x)}{\arcsin(7x)}$$

Raccordo  $\times$  sopra e sotto

$$\frac{\boxed{\frac{e^{2x}-1}{x}} + \boxed{\frac{1-\cos(3x)}{x}}}{\boxed{\frac{\arcsin(7x)}{x}}} \rightarrow \frac{2}{7} \quad \frac{1-\cos(3x)}{x} = \frac{1-\cos(3x)}{3x^2} \cdot \boxed{3x}$$

Annotations:   
 - For  $\frac{e^{2x}-1}{x}$ ,  $\uparrow 2$  and  $\downarrow 1$    
 - For  $\frac{1-\cos(3x)}{x}$ ,  $\uparrow 0$  and  $\downarrow 1$    
 - For  $\frac{\arcsin(7x)}{x}$ ,  $\downarrow 7$    
 - For  $\frac{1-\cos(3x)}{3x^2}$ ,  $\downarrow \frac{1}{2}$    
 - For  $3x$ ,  $\downarrow 0$

Esempio 4  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = e^2$

$$(1 + \sin(2x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \log(1 + \sin(2x))}$$

Faccio solo il limite dell'esponente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(2x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin(2x))}{\sin(2x)} \cdot \frac{\sin(2x)}{x} = 2$$

Annotations:   
 - For  $\frac{\log(1 + \sin(2x))}{\sin(2x)}$ ,  $\downarrow 1$  and  $\uparrow y = \sin(2x)$    
 - For  $\frac{\sin(2x)}{x}$ ,  $\downarrow 2$

Esempio 5  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{\tan^2 x} \quad \left[ \frac{0}{0} \right]$

$$\frac{\log(1 + \overbrace{\cos x - 1}^y)}{\tan^2 x} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\tan^2 x} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Annotations:   
 - For  $\frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1}$ ,  $\downarrow 1$  and  $y = \cos x - 1, y \rightarrow 0$    
 - For  $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ ,  $\downarrow -\frac{1}{2}$    
 - For  $\frac{x^2}{\tan^2 x}$ ,  $\downarrow 1$

Teo. algebrico per l'esponenziale  $\lim_{x \rightarrow q.c.} f(x)^{g(x)}$

Se  $f(x) \rightarrow l_1$  e  $g(x) \rightarrow l_2$ , allora  $f(x)^{g(x)} \rightarrow l_1^{l_2}$  tranne nei casi

$$1^{\pm\infty}$$

$$0^0$$

$$+\infty^0$$

Dim. Passando all'esponenziale mi riduco a fare il lim. di  $g(x) \cdot \log f(x)$

quindi al limite del prodotto.

Le 3 forme indeterminate si riducono a  $0 \cdot \pm\infty$

— 0 — 0 —

Esempio 6  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x}$

$$\frac{\log(1+3^x)}{x} = \frac{\log(1+3^x)}{3^x} \cdot \frac{3^x}{x} \rightarrow +\infty \quad \text{NO!!!}$$

Se pongo  $y = 3^x$  ho che  $y \rightarrow +\infty$ , quindi non è il limite notevole

Brutalmente:  $\log(1+3^x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x \\ \text{grande}}}{\sim} \log(3^x) = x \log 3$

Rigorosamente: raccolgo  $3^x$  dentro la parentesi

$$\frac{\log(3^x \frac{1+3^x}{3^x})}{x} = \frac{x \log 3 + \log(1 + \frac{1}{3^x})}{x} = \log 3 + \frac{\log(1 + \frac{1}{3^x})}{x}$$

$\downarrow$   $\log 3$        $\downarrow$   $\frac{0}{+\infty} = 0$

Quindi il limite è  $\log 3$ .

Esempio 7  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2+2)}{\log(x^3+3)} = \frac{2}{3}$  È come fosse  $\frac{\log x^2}{\log x^3}$

Esempio 8  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^3+1)}{\log(x^2+1)} = 0$

$$\frac{\log(1+x^3)}{\log(1+x^2)} = \frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\log(1+x^2)} \cdot x \rightarrow 0$$

$\downarrow$  1                       $\downarrow$  1                       $\downarrow$  0

Esempio 9  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Passando all'esponenziale mi riduco a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \log(\cos x)$

e questo tende a  $-\frac{1}{2}$  come in un esempio precedente