

ANALISI 1 — LEZIONE 018

Titolo nota

16/10/2014

LIMITI NOTEVOLI

Criterio successioni $\rightarrow$ funzioni (come dedurre limiti di funzioni da limiti di successioni)

Idea: so che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ (lim. succ.) Vorrei che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$ (con. lim. funz.)

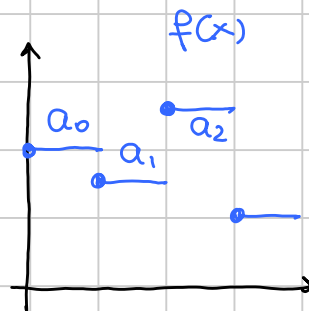
Lemma Sia $f(x)$ una funzione costante su tutti gli intervalli del tipo $[n, n+1)$.

Poniamo $a_n = \text{valore di } f(x) \text{ in } [n, n+1)$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

qualunque cosa faccia a_n (①, ②, ③, ④)
la stessa cosa fa $f(x)$.



Dim. Ovvio (quello che a_n soddisfa $\forall n \geq n_0$, lo stesso lo verifica $f(x)$ $\forall x \geq n_0$)

Lemma + confronto sistematico molti casi

Esempio 1

$$\frac{2^x}{x} \geq \frac{2^n}{n+1}$$

$\uparrow$
den. + piccolo
num. + grande

$\downarrow$
 $+\infty$
per confronto

$$\forall x \in [n, n+1)$$

pensata come funzione a
gradienti $\rightarrow +\infty$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ voglio dedurlo da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\boxed{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n} \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \quad \forall x \in [n, n+1]$$

$\downarrow$ e $\downarrow$ e $\downarrow$ e

Vediamo per bene i laterali:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow e$$

$\downarrow$ e $\downarrow$ 1

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\boxed{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}}{\boxed{1 + \frac{1}{n+1}}} \rightarrow e$$

$\downarrow$ 1

(se $a_n \rightarrow l$, allora anche $a_{n+1} \rightarrow l$)

— 0 — 0 —

Questo sistema

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dim. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, quindi basta dim. che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Facciamo finta di sapere che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$
 Quando $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ho $\sin x > 0$, quindi posso dividere per $\sin x$
 Ottengo

$$\boxed{1} \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = 1$ per teo. alg. anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Dimostro la disug. usando la figura

$$\overline{PP'} = 2 \sin x$$

↑
segm.

$$\widehat{PP'} = 2x$$

↑
arco

$$\text{segmento} \leq \text{arco} \quad \leadsto \quad 2 \sin x \leq 2x$$

$$\text{Area triangolo } OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$$

$$\text{Area settore } OAP : \text{Area cerchio} = x : 2\pi$$

$$\text{Area settore } OAP = \frac{\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

$$\text{Se Area sett.} \leq \text{Area triang.}, \text{ allora } \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x$$

Limiti che discendono da $\frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \boxed{\frac{\sin^2 x}{x^2}} \cdot \boxed{\frac{1}{1 + \cos x}} \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

↓ ↓
1 1/2

Oss.

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \boxed{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \cdot \boxed{x} \rightarrow 0$$

↓ ↓
1/2 0

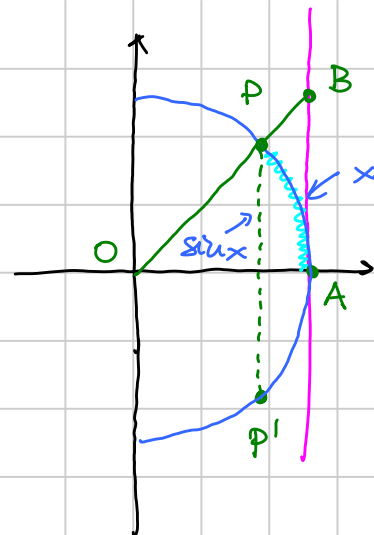
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin x}{x}} \cdot \boxed{\frac{1}{\cos x}} = 1$$

↓ ↓
1 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Pongo $y = \arctan x$

Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad \text{con la sostituzione } y = \arcsin x$$

— 0 — 0 —

Limiti che discendono da $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{Pongo } y = -x. \text{ Quando } x \rightarrow -\infty \text{ ho } y \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{\substack{\downarrow \leftarrow z=y-1 \\ e}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = e$$

Quindi abbiamo dim. che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Osserviamo che $\log x$ è una funzione continua.

Quindi facendo il log a RHS e LHS sopra otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Nel primo caso ho $y \rightarrow 0^-$. Nel secondo caso $y \rightarrow 0^+$

Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y} \log(1+y) = 1 = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y)$$

Ho così dim.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Ora pongo $z = \log(1+y)$. Quando $y \rightarrow 0$ ho $z \rightarrow \log 1 = 0$

Ricavo y : $e^z = 1+y$, $y = e^z - 1$. Quindi il limite sopra diventa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

LIMITE DIMENTICATO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0^-$$

Pongo $y = \frac{1}{x}$. Diventa $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \log \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} -\frac{\log y}{y}$

Pongo $\log y = z$ e diventa $\lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$ (anzi 0^-)

Oss. Anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\log x|^b = 0 \quad \forall a > 0 \quad \forall b > 0$

Esercizio: fare cambi di variabili e vedere che viene,

— 0 — 0 —