

Strumenti per il calcolo di limiti di funzione

- teoremi algebrici (esattamente come per le successioni)
- teoremi di confronto a 2 e a 3 (come per le successioni)
- continuità (se f è cont. in x_0 , allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$)
- limiti notevoli
- cambi di variabile.

Come stabilisco se una funzione è continua?

METATEOREMA (molto misterioso) Qualunque funzione ottenuta a partire da quelle elementari mediante oper. algebriche e/o composizioni è continua dove è definita (quindi dove non ci sono problemi di $\text{denom} = 0$, $\log(\text{roba} \leq 0)$, ...)

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \log_7 (7 + \arctan(2^x + 4 \sin x)) = \log_7 (7 + \frac{\pi}{4})$

funzione continua su tutto $\mathbb{R}$
(l'unica verifica da fare è che l'argomento del $\log$ sia > 0)

Ingrediente 1

Tutte le funzioni elementari sono continue dove sono definite.

(Richiede dim. separate per le varie funzioni)

Ingrediente 2

Somma, prodotto e quoziente di funzioni continue è ancora una funzione continua dove definite ($\text{denom.} \neq 0$)

(segue banalmente dai teoremi algebrici)

Inghrediente 3 La composizione di funzioni continue è ancora continua (dove tutto è ben definito)
(Richiede i cambi di variabile)
— o — o —

Esempio di cambio di variabile

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$

e che $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0$.

Allora verrebbe da dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = z_0$

Detto brutalmente: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$ Pongo $y = g(x)$ ^{cambio di variabile}
Quando $x \rightarrow x_0$, ho $y \rightarrow y_0$
e allora il limite iniziale diventa

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = z_0$$

Tutto ciò di solito si può fare.

Caso semplice (senza problemi burocratici)

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$

Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua su tutto $\mathbb{R}$

Allora $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Devo dimostrare che $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

So per ipotesi che f è continua in $g(x_0)$

Idea: se x è vicino a x_0 , allora $g(x)$ è vicino a $g(x_0)$ per la continuità di g , ma allora $f(g(x))$ è vicino a $f(g(x_0))$ per la continuità di f in $g(x_0)$

Poiché f è continua in $g(x_0)$ so che $\exists \delta_1 > 0$ t.c.

$$|f(y) - f(g(x_0))| \leq \varepsilon \quad \forall y \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$$

Ora uso la continuità di g con δ_1 al posto di ε :

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ t.c. } |g(x) - g(x_0)| \leq \delta_1 \quad \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2].$$

Il δ_2 è il δ che volevo, perché

• Se $x \in [x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2]$, allora $g(x) \in [g(x_0) - \delta_1, g(x_0) + \delta_1]$,
ma allora $f(g(x)) \in [f(g(x_0)) - \varepsilon, f(g(x_0)) + \varepsilon]$.

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ [1[∞]]

FIGLI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

NIPOTI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a \quad (\text{se } a > 0)$$

LIMITE DIMENTICATO: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$ [0 · (-∞)]

Gli altri sono tutti $\frac{0}{0}$

Esempio 1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

Pongo $y = x^2$

Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 0$

Esempio 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = 1$

$$\frac{e^{\arctan x} - 1}{\arctan x}$$

$$\frac{\arctan x}{x}$$

$$\rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

(tabellina)

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho che $y \rightarrow 0$, quindi diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

Esempio 3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \sin 1$ da subito per il metateo.

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$ ho $y \rightarrow 1$, quindi diventa

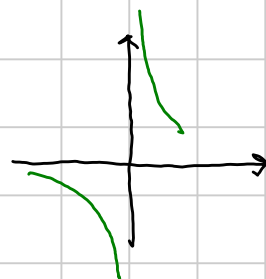
$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1 \quad (\text{funzione continua})$$

Esempio 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(7x)}{x^2} = 49$

$$\frac{\sin^2(7x)}{x^2} = \left[\frac{\sin(7x)}{x} \right]^2 = \left[\frac{\sin(7x)}{7x} \right]^2 \cdot 49 = 49$$

$y = 7x$
 $\downarrow$
 1

Esempio 5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \text{N.E.}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

Esempio 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \rightsquigarrow \boxed{-\frac{1}{x}} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \boxed{\frac{1}{x}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Ok per $x \rightarrow +\infty$
perché sto dividendo per x

a $-\infty$ (cioè per x negativo) devo capovolgere

$$\overset{\text{pos}}{\boxed{-\frac{1}{x}}} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \boxed{\frac{1}{x}} \text{ neg.}$$

TRUCCO DEL VALORE ASSOLUTO

Per successioni: $x_n \rightarrow 0 \iff |x_n| \rightarrow 0$
(con la def. è ovvio)

Per funzioni: $\lim_{x \rightarrow q.c.} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \text{stessa cosa}} |f(x)| = 0$

Semplifica molti esempi...

— 0 — 0 —